①

CONSIDERIAMO COMPOSIZIONE DI FUNZIONI : $C \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{k} D$ (SUPPONENDO LE APPLICAZIONI COMPONIBILI)

$$k \circ f \circ h = g$$

RISCRIVIAMO LE APPLICAZIONI SECONDO UNO SCHEMA SOTTO RIPORTATO CHE DETERMINA IL COSì DETTO <u>DIAGRAMMA</u> <u>COMMUTATIVO</u> (A LIVELLO INSIEMISTICO):

$$\begin{tikzcd}
h(c) \arrow[r, mapsto, "f"] & f(h(c)) \arrow[d, mapsto] \\
A \arrow[r] & B \arrow[d, "k"] \\
C \arrow[u, "h"] \arrow[r, "g"] & D \\
c \arrow[uuu, mapsto] \arrow[r, mapsto] & g(c) = k(f(h(c)))
\end{tikzcd}$$

È COMMUTATIVO PERCHÉ POSSIAMO, AD ESEMPIO, DETERMINARE L'IMMAGINE IN D DI UN ELEMENTO DI A PASSANDO PER B (TRAMITE f E k) OPPURE OTTENIAMO LO STESSO ELEMENTO PASSANDO PER C (TRAMITE h^{-1} E g) E COSì VIA.

CONSIDERIAMO ORA UN'APPLICAZIONE L LINEARE, FISSATE LE BASI B_V e B_W, AD L è ASSOCIATA UNA MATRICE $[L]^{B_W}_{B_V}$; PRENDIAMO NUOVE BASI B'_V e B'_W CERCHIAMO LA MATRICE $[L]^{B'_W}_{B'_V}$

$$\begin{tikzcd}
(V, B_V) \arrow[r, "L"] & (W, B_W) \arrow[d, "id_W"] \\
(V, B'_V) \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "L"] & (W, B'_W)
\end{tikzcd}$$

$v \longmapsto L(v)$

$v \longmapsto L(v)$

FORMIAMO IL DIAGRAMMA COMMUTATIVO MEDIANTE L E LE APPLICAZIONI IDENTITÀ SU V E SU W. ⟹

$$L = id_W \circ L \circ id_V \Longrightarrow [L]^{B'_W}_{B'_V} = [id_W]^{B'_W}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [id_V]^{B_V}_{B'_V}$$

COSì FACENDO TROVO LA NUOVA MATRICE

(A LIVELLO DI MATRICI)

SONO <u>CAMBIATE</u> LE BASI DEGLI SPAZI quindi LA MATRICE è <u>DIVERSA</u>!!

IL VETTORE è FISSO MA è CAMBIATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO: LE APPLICAZIONI IDENTITÀ MANDANO UN VETTORE IN SE STESSO, MA LE COORDINATE SONO DIVERSE PERCHÉ LE BASI SONO DIVERSE!

• <u>Esempio</u>:

$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad [L]^{e_{\mathbb{R}^3}}_{e_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

CAMBIO LE BASI: $B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 \cdot (-1) \neq 0 \right.$ È BASE! $\left. \right)$

CERCO: $[L]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}}$:

CONSIDERO IL DIAGRAMMA COMMUTATIVO:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, e_{\mathbb{R}^2}) \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^3, e_{\mathbb{R}^3}) \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] \\
(\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2}) \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^2}"] \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^3, B_{\mathbb{R}^3})
\end{tikzcd}$$

CERCO: $[id_{\mathbb{R}^3}]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{e_{\mathbb{R}^3}}$: VADO A TROVARE LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DI $\mathbb{R}^3$ ⟹

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_{R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim^{R_3 - 2R_2}_{R_3 + 2R_1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1/2 \\ \sim R_2/-2 \\ R_3/2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

LA MATRICE RISULTANTE È QUINDI:

$$\left[id_{\mathbb{R}^3}\right]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ORA CERCHIAMO LA TERZA MATRICE CHE SERVE: $\left[id_{\mathbb{R}^2}\right]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}_{B_{\mathbb{R}^2}}$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}) \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}) \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] \\
(\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2}) \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^2}"] \arrow[r] & (\mathbb{R}^3, B_{\mathbb{R}^3})
\end{tikzcd}$$

$$\left[id_{\mathbb{R}^2}\right]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

A QUESTO PUNTO CALCOLIAMO IL PRODOTTO:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times2} = \left([L]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}} \right)$$

- Esercizio:

SIANO V, W SPAZI VETTORIALI; FISSATE LE BASI NEGLI SPAZI VETTORIALI $\Longrightarrow$ POSSO ASSOCIARE UNA MATRICE AD UNA APPLICAZIONE LINEARE $L: V \to W$ E VICEVERSA AD UNA MATRICE IN $\mathcal{M}_{(\dim W)\times(\dim V)}(\mathbb{R})$ POSSO ASSOCIARE UN'APPLICAZIONE LINEARE $L: V \to W$ ~~...~~, DETTO $\mathcal{L}^{*}(V, W)$ LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI $L: V \to W$, SI DIMOSTRA CHE ESSO È UNO SPAZIO VETTORIALE

(* $\mathcal{L}(V,W)$ o $Hom(V,W)$ SONO L'INSIEME DEGLI OMOMORFISMI)

$\Longrightarrow$

POSSIAMO DEFINIRE $\phi: \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{M}_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{R})$ TALE CHE $\phi(L) = [L]^{B_W}_{B_V}$, POSSIAMO DIMOSTRARE CHE ϕ È BIETTIVA E QUINDI INVERTIBILE E LA SUA INVERSA È $\phi^{-1}: \mathcal{M}_{\dim V \times \dim W}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(V,W)$ TALE CHE $\phi^{-1}(A) = L_A$ dove $L_A: V \to W$ È COSÌ DEFINITA $[L_A(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$

(PER ESERCIZIO dimostrare che: ϕ^{-1} È L'INVERSA DI ϕ)

$\phi: \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{M}_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{R})$ È LINEARE (da dimostrare); ABBIAMO PERTANTO UN'APPLICAZIONE ϕ CHE È UN ISOMORFISMO TRA TALI SPAZI VETTORIALI CHE DIPENDE DALLE BASI FISSATE NEGLI SPAZI. (SE CAMBIO LE BASI CAMBIA L'ISOMORFISMO) ~~...~~

Gli spazi vettoriali $\mathcal{L}(V,W)$ ed $\mathcal{M}_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{R})$ hanno dunque la stessa dimensione: $\dim W \times \dim V$ ③

Posso scrivere l'espressione analitica di un'applicazione lineare di cui ha la matrice associata "solo" se le basi negli spazi sono quelle canoniche!

Esempio:

$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che $[L]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(x,y) \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, 2x-y, 3x+y)$

In $\mathbb{R}^2$ prendo $B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$ v_1 ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nella base canonica

infatti:

$v_1 = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se cerchiamo le coordinate di v_1 nella base $B \Rightarrow$

$v_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [v_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[v_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ analogamente per v_2: $[v_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, [v_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo ora:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2}) & \xrightarrow{L} & (\mathbb{R}^3, B_{\mathbb{R}^3}) \\
\Big\uparrow [id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}}^{B} & \circlearrowright & \Big\downarrow [id_{\mathbb{R}^3}]_B^{\mathcal{E}} \\
(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}) & \xrightarrow{L} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3})
\end{array}$$

con $B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$[id_{\mathbb{R}^3}]_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Supponiamo di avere $[L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$ e cerchiamo

$\Rightarrow [L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [id_{\mathbb{R}^3}]_B^{\mathcal{E}} \cdot [L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} \cdot [id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}}^{B_{\mathbb{R}^2}}$

$L: V \to V$ biettiva, supponiamo di avere la base B nel dominio e la base B' nel codominio e consideriamo:

$L^{-1}: V \to V$ sua inversa $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ data $\underset{A}{[L]_B^{B'}} \Rightarrow [L^{-1}]_{B'}^{B} = \left([L]_B^{B'}\right)^{-1}$

$B = A^{-1}$: cioè la matrice associata alla applicazione inversa di una applicazione lineare biettiva L, è la matrice inversa della matrice associata ad L nelle basi date.

Infatti: dimostrazione:

$L \circ L^{-1} = id$ e $[id]_{B'}^{B'} = I = [id]_B^B$

$\Downarrow$

$A \cdot B = I$

$\Rightarrow B = A^{-1}$.