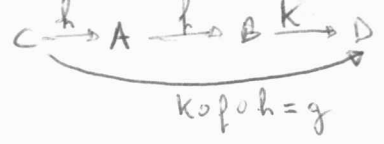
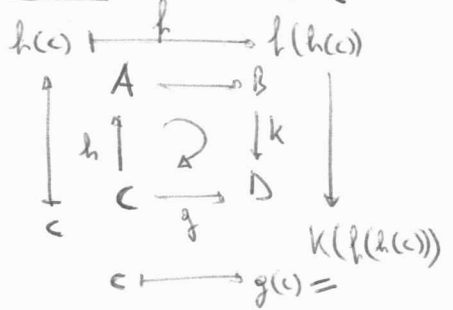


CONSIDERIAMO COMPOSIZIONE DI FUNZIONI : $C \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{k} D$ (SOPPONENDO LE



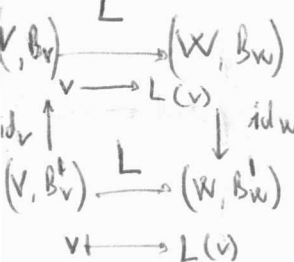
APPLICAZIONI COMPONIBILI

RISCRIVIAMO LE APPLICAZIONI SECONDO UNO SCHEMA SOTTO RIPORTATO CHE DETERMINA IL COST. DETTO DIAGRAMMA COMMUTATIVO (A LIVELLO INSIEMISTICO):



È COMMUTATIVO PERCHÉ POSSIAMO, AD ESEMPIO, DETERMINARE L'IMMAGINE IN D DI UN ELEMENTO DI A PASSANDO PER B (TRAMITE f E k) OPPURE OTTENIAMO LO STESSO ELEMENTO PASSANDO PER C (TRAMITE h⁻¹ E g) E COSÌ VIA.

ORA: CONSIDERIAMO ORA UN'APPLICAZIONE



L LINEARE, FISSATE LE BASI B_V E B_W, AD L È ASSOCIATA UNA MATRICE [L]_{B_W}^{B_V} ;

PRENDIAMO NUOVE BASI B'_V E B'_W CERCIAMO LA MATRICE [L]_{B'_V}^{B'_W}

FORMIAMO IL DIAGRAMMA COMMUTATIVO MEDIANTE L E LE APPLICAZIONI IDENTITÀ SU V E SU W. ⇒ L = id_W ∘ L ∘ id_V ⇒ [L]_{B'_V}^{B'_W} = [id_W]_{B'_W}^{B'_W} ∘ [L]_{B_V}^{B_W} ∘ [id_V]_{B_V}^{B'_V} COSTI FACENDO TROVO LA NUOVA MATRICE (A LIVELLO DI MATRICI)

SONO CAMBIATE LE BASI DEGLI SPAZII QUINDI LA MATRICE È DIVERSA!!

IL VETTORE È FISSO MA È CAMBIATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO: LE APPLICAZIONI IDENTITÀ MANDANO UN VETTORE IN SE STESSO, MA LE COORDINATE SONO DIVERSE PERCHÉ LE BASI SONO DIVERSE!

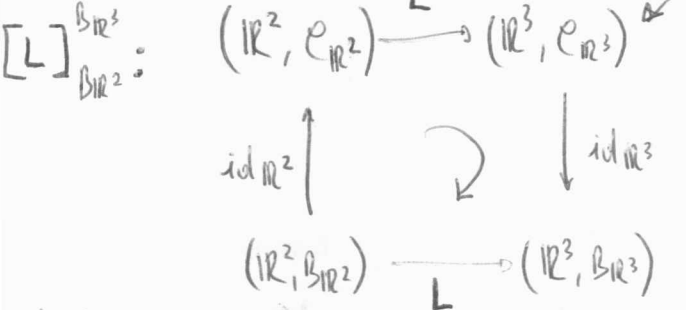
Esempio:

L: ℝ² → ℝ³ [L]_{e_{ℝ²}}^{e_{ℝ³}} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

CAMBIO LE BASI: B_{ℝ²} = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ }
 B_{ℝ³} = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ }

CONSIDERO IL DIAGRAMMA COMMUTATIVO: $\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 \cdot (-1) \neq 0 \right)$ È BASE!

CERCO:



CERCO [id_{ℝ³}]_{B_{ℝ³}}^{B_{ℝ³}}: VADO A TROVARE LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DI ℝ³.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 - 2R_2 \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1/2 \\ R_2/-2 \\ R_3/2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

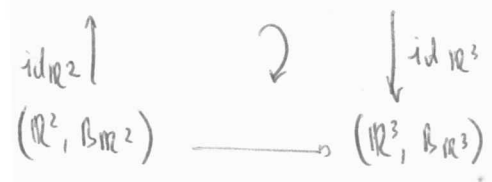
LA MATRICE RISULTANTE È QUINDI:

$$[\text{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

TERZA

ORA CERCHIAMO LA MATRICE CHE SERVE: $[\text{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}$

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3})$$



$$[\text{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

A QUESTO PUNTO CALCOLIAMO IL PRODOTTO:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} [L]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} \end{pmatrix}$$

Esercizio:

SIANO V, W SPAZI VETTORIALI; FISSARE LE BASI NEGLI SPAZI VETTORIALI \Rightarrow POSSO ASSOCIARE UNA MATRICE AD UNA APPLICAZIONE LINEARE $L: V \rightarrow W$ E VICEVERSA AD UNA MATRICE IN $M_{(\dim W) \times (\dim V)}(\mathbb{R})$. POSSO ASSOCIARE UN'APPLICAZIONE LINEARE $L: V \rightarrow W$ ~~ad una matrice~~, DETTO $\mathcal{L}(V, W)$ LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI $L: V \rightarrow W$, SI DIMOSTRA CHE ESSO È UNO SPAZIO VETTORIALE

$\mathcal{L}(V, W)$ o $\text{Hom}(V, W)$ SONO L'INSIEME DEGLI OMOMORFISMI

\Rightarrow POSSIAMO DEFINIRE $\phi: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{R})$ TALE CHE $\phi(L) = [L]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$, POSSIAMO DIMOSTRARE CHE ϕ È BIETTIVA E QUINDI INVERTIBILE E LA SUA INVERSA È $\phi^{-1}: M_{\dim V \times \dim W}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ TALE CHE

$$\phi^{-1}(A) = L_A \text{ dove } L_A: V \rightarrow W \text{ è COSÌ DEFINITA } [L_A(v)]_{\mathcal{B}_W} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}_V}$$

PER ESERCIZIO
 (dimostrare che:
 ϕ^{-1} è l'inversa di ϕ)

$\phi: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{R})$ È LINEARE (da dimostrare); ABBIAMO PERTANTO UN'APPLICAZIONE CHE DIPENDE DALLE BASI FISSATE NEGLI SPAZI VETTORIALI. ϕ È UN ISOMORFISMO TRA TALI SPAZI VETTORIALI (SE CAMBIO LE BASI CAMBIA L'ISOMORFISMO).

Gli spazi vettoriali $\mathcal{L}(V, W)$ ed $M_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{R})$ HANNO DUNQUE LA STESSA DIMENSIONE $\dim W \times \dim V$ (3)

Posso scrivere l'espressione analitica di un'applicazione lineare di cui ha la matrice associata "solo" se le basi negli spazi sono quelle canoniche!

Esempio:

$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che $[L]_{e_{\mathbb{R}^2}}^{e_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
 $(x, y) \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, 2x-y, 3x+y)$

In \mathbb{R}^2 prendo $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ v_1 ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nella base canonica

Infatti:
 $v_1 = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se cerchiamo le coordinate di v_1 nella base $B \Rightarrow$
 $v_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [v_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ANALOGAMENTE PER v_2 ,
 $[v_2]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, [v_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo ora:

$(\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2}) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^3, B_{\mathbb{R}^3})$ con $B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$[id_{\mathbb{R}^2}]_e^B \xrightarrow{L} [id_{\mathbb{R}^3}]_B^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(\mathbb{R}^2, e_{\mathbb{R}^2}) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^3, e_{\mathbb{R}^3})$ supponiamo di avere $[L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$ e cerchiamo

$\Rightarrow [L]_e^e = [id_{\mathbb{R}^3}]_B^e \cdot [L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} \cdot [id_{\mathbb{R}^2}]_e^B$

$L: V \rightarrow V$ BIETTIVA, supponiamo di avere la base B nel dominio e la base B' nel codominio - e consideriamo:

$L^{-1}: V \rightarrow V$ SUA INVERSA \Rightarrow
 \Rightarrow DATA $[L]_B^{B'} \Rightarrow [L^{-1}]_{B'}^B = ([L]_B^{B'})^{-1}$

$B = A^{-1}$: cioè la matrice associata alla applicazione inversa di una applicazione lineare biettiva L , e la matrice inversa della matrice associata ad L nelle basi date.

Infatti: DIMOSTRAZIONE:
 $L \circ L^{-1} = id$ e $[id]_{B'}^{B'} = I = [id]_B^B$

\Downarrow
 $A \cdot B = I$
 $\Rightarrow B = A^{-1}$