GEOMETRIA 14/11/11

Esempi di basi di Spazi vettoriali

$\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$: voglio dimostrare che $\left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_6}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$

[$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ sono vettori dello ~~sta~~ spazio vettoriale $\mathcal{M}_{2\times3}$]

è base di $\mathcal{M}_{2\times3}$

Bisogna dimostrare:

1) sono linearmente indipendenti:

posto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_6 v_6 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, 6$

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{VETTORE NULLO DI } \mathcal{M}_{2\times3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_6 = 0 \end{cases}$$

tutte le entrate ~~sono~~ valgono "0" e ~~[illegible]~~ quindi i VETTORI $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ SONO linearmente indipendenti.

2) generano $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$: prendiamo un "generico" vettore di $\mathcal{M}_{2\times3}$

generico: deve essere generale, deve avere delle incognite (in questo caso variabili). <u>Non</u> bisogna dare dei valori NUMERICI

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_6 v_6$$

DATO

BISOGNA TROVARE TUTTI GLI α_k IN FUNZIONE DEI VALORI DATI a_{ij} DELLA MATRICE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a_{11} \\ \alpha_2 = a_{12} \\ \alpha_3 = a_{13} \\ \alpha_4 = a_{21} \\ \alpha_5 = a_{22} \\ \alpha_6 = a_{23} \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato che i vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ sono generatori di $M_{2\times3}(\mathbb{R})$

DUNQUE $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_6\}$ È BASE DI $M_{2\times3}$. QUESTA È LA BASE CANONICA DI $M_{2\times3}$

$\Rightarrow$ ESSENDO $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ FORMATA DA 6 VETTORI $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ dimensione di $M_{2\times3} = 6$

REGOLA GENERALE
$$\left[\dim M_{p\times m}(\mathbb{R}) = p \times m\right]$$

TROVARE un'altra base di $M_{p\times m}$: AD ESEMPIO DI $M_{2\times2}$.

VOGLIAMO DARE una base di $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ (oltre quella canonica C)

AD ESEMPIO:
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = B$$

Basta per vedere che tali vettori sono linearmente indipendenti perché sappiamo che $\dim M_{2\times2} = 4$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IMPONIAMO NOI CHE SIA PARI AL VETTORE NULLO

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

BISOGNA RISOLVERE QUESTO SISTEMA LINEARE OMOGENEO (CON IL METODO CHE SI PREFERISCE SE NON È RICHIESTO UN METODO PARTICOLARE)

RISOLVENDO $\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ I 4 VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E QUINDI FORMANO UNA BASE DI M_{2x2}

~ ~ ~ ~ ~

ESEMPIO:
Prendo un vettore v dello spazio $M_{2x2}(\mathbb{R})$ E LO SCRIVIAMO COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE CANONICA:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LE COORDINATE DEL VETTORE "V" SONO LE COMPONENTI DELLA SUA COMBINAZIONE LINEARE NELLA BASE SCELTA

$$\Rightarrow \underbrace{[V]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{COORDINATE NELLA BASE CANONICA}}$$

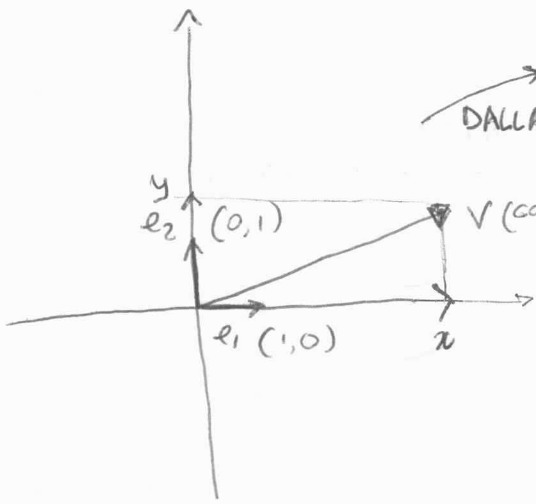
Posso vedere il vettore "V" espresso nella base "C" come una ~~matrice~~ vettore colonna.

CAMBIAMO BASE DI M_{2x2} E DETERMINIAMO I COEFF. DELLA COMBINAZIONE LINEARE CHE ESPRIME V NELLA BASE B SCELTA.
(si deve risolvere un sistema lin. NON OMOGENEO):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_4 = 1 \\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 = 2 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4 = 3 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 4 \end{cases} \quad \text{S.L.N.O.}$$

RISOLVO $\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 2 \\ \alpha_4 = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow [V]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

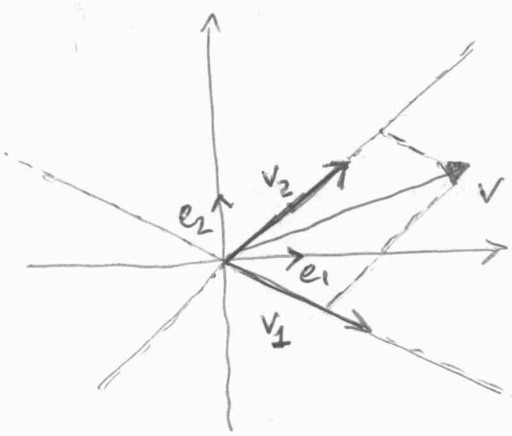


SISTEMA DI RIFERIMENTO DETERMINATO DALLA BASE CANONICA $\mathcal{E} = \{ e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1} \}$

V (COORDINATE NELLA BASE CANONICA)

CAMBIANDO LA BASE

↓



SI FA RIFERIMENTO ALLA NUOVA BASE $B = \{ v_1, v_2 \}$ QUINDI A UN NUOVO ~~SR~~ SISTEMA DI RIFERIMENTO

V (COORDINATE NELLA NUOVA BASE)

Il vettore V rimane nella stessa posizione, cambiano solo le sue coordinate PERCHÈ ABBIAMO CAMBIATO LA BASE.

~ ~ ~ ~

Dare una base di $\mathbb{R}^3$ significa trovare dei vettori linearmente indipendenti che generano $\mathbb{R}^3$

Servono 3 vettori: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← VETTORI DATI

$\Rightarrow C = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ è base (canonica) di $\mathbb{R}^3$

└ DIMOSTRARE (1)

(2) Dare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ diversa da C

(3) Determinare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = [v]_C$ nella base $\mathcal{B}$ che avete dato, cioè $[v]_{\mathcal{B}}$

~ ~ ~ ~

- Dimostrare che l'insieme dei polinomi a coeff. reali nella variabile x di qualunque grado è uno spazio vettoriale
[$\mathbb{R}[x]$ = insieme polinomi a coeff. reali in x di grado qualunque]

- Dimostrare che l'insieme dei polinomi in x a coeff. reali di grado al max $k \in \mathbb{N}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$
[$\mathbb{R}[x]_k$]

Consideriamo $\mathbb{R}[x]_2$ (è uno spazio vettoriale, io cerco una base):

1) dimostrare che $\{\underbrace{1, x, x^2}_{\text{BASE CANONICA}}\} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}[x]_2$
$\Rightarrow \dim \mathbb{R}[x]_2 = 3$; la base canonica di $\mathbb{R}[x]_2$ è $\{1, x, x^2\}$
[Es $v = 3x^2+4x-8 \Rightarrow [v]_{\{1,x,x^2\}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$]

2) determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}[x]_2 \neq$ dalla canonica e determinare $[v]_{\mathcal{B}}$ con $v = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Def. di rango (PROPOSIZIONE)

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}_{3\times4}$ le righe della matrice possono essere viste come vettori di uno spazio ~~quadri~~ 4-dimensionale, un $\mathbb{R}^4$

le colonne sono vettori di un $\mathbb{R}^3$

PROPOSIZIONE ~~Dati~~ SIANO p vettori $v_1, \dots, v_p$ di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, linearmente dipendenti, e supponiamo $p \leq n$
$\Rightarrow$ tutti i minori di ordine p della matrice avente quei vettori come vettori riga, sono nulli. (e viceversa)

DIMOSTRAZIONE "$\Rightarrow$" Se i p vettori sono linearmente dipendenti
$\Rightarrow$ almeno uno fra essi è combinazione lineare degli altri, infatti posto $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \Rightarrow \exists$ almeno $\alpha_j \neq 0$
$\Rightarrow$ posso dividere per $\alpha_j \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 + \dots + v_j + \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} + \dots + \frac{\alpha_p}{\alpha_j} v_p = 0$

$$\Rightarrow v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} - \dots - \frac{\alpha_p}{\alpha_j} v_p$$

$\Rightarrow v_j$ è combinazione lineare degli altri.
ALLORA nella matrice da essi formata, ~~[illegible]~~ la j-esima una riga è combinazione lineare delle altre. $\Rightarrow$ nelle sottomatrici $p\times p$ la j-esima riga è combinazione lineare delle altre, e quindi tutti i minori DI ORDINE P sono nulli.

c.v.d.

PROPOSIZIONE: Il rango di una matrice è pari al numero max di suoi vettori riga linearmente indipendenti.