Consideriamo K vettori in uno spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$; essi formano una matrice $K\times K$ di questo tipo: detti $v_1,\dots,v_K$ tali vettori abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & \dots & v_1\cdot v_K \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & \dots & v_2\cdot v_K \\ \vdots & & & \\ v_K\cdot v_1 & v_K\cdot v_2 & \dots & v_K\cdot v_K \end{pmatrix} \quad K\leq n.$$

Tale matrice è detta MATRICE di GRAM dei K vettori $v_1,\dots,v_K$ ed il suo determinante è detto GRAMIANO.

Oss: 1) ortogonalizziamo i K vettori $v_1,\dots,v_K$ ottenendo i vettori ortogonali $w_1,\dots,w_K$, supponendo che $v_1,\dots,v_K$ siano linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ supponiamo di considerare ad esempio $K=2$: considero la matrice di Gram $\begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2\end{pmatrix} \Rightarrow$ essendo $w_1=v_1$ posso scrivere $\begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot v_2 \\ v_2\cdot w_1 & v_2\cdot v_2\end{pmatrix}$

Sappiamo che $w_2=v_2-\alpha_1 w_1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \overset{R_2'=R_2-\alpha_1 R_1}{\sim} \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot v_2 \\ v_2\cdot w_1-\alpha_1 w_1\cdot w_1 & v_2\cdot v_2-\alpha_1 w_1\cdot v_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot v_2 \\ (v_2-\alpha_1 w_1)\cdot w_1 & (v_2-\alpha_1 w_1)\cdot v_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_1\cdot w_2 & w_1\cdot v_2 \\ w_2\cdot w_1 & w_2\cdot v_2\end{pmatrix} \overset{C_2'=C_2-\alpha_1 C_1}{\sim}$$

Analogamente possiamo operare sulle colonne: CON OPERAZIONI ELEMENTARI COLONNA

$$\sim \begin{pmatrix} w_1\cdot w_1 & w_1\cdot w_2 \\ w_2\cdot w_1 & w_2\cdot w_2\end{pmatrix} =$$

(abbiamo ottenuto una matrice equivalente a quella di partenza mediante operazioni elementari riga e colonna, CHE sono determinantali.)

$$= \begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|w_2\|^2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{G(v_1,\dots,v_K)}{\underset{\shortparallel}{\text{Gramiano }(v_1,\dots,v_K)}} = \|w_1\|^2\cdots\|w_K\|^2$$

2) $G(v_1,\dots,v_K)\neq 0 \iff$ i vettori $v_1,\dots,v_K$ sono linearmente indipendenti

<u>Proposizione</u>: Dati i vettori $v_1, \dots, v_k$ $\Rightarrow$ considerato il parallelepipedo $P_{(v_1,\dots,v_k)}$ avente per lati $v_1, \dots, v_k$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Vol} P_{(v_1,\dots,v_k)} = \sqrt{G(v_1,\dots,v_k)}$

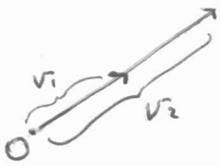
$\operatorname{Vol} P_{(v_1,\dots,v_k)}$ = VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO

<u>Dimostrazione</u> per induzione su k:

1) verifica per $k = 1$ $\Rightarrow P_{v_1} = \|v_1\| = \sqrt{v_1 \cdot v_1}$

verifica per $k=2$ considero v_1, v_2.

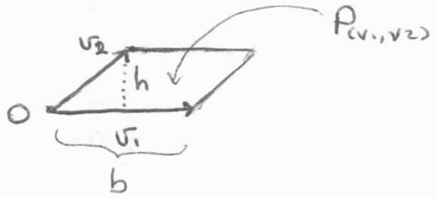
Se v_1, v_2 linearmente dipendenti



$G = 0$

ma anche l'area di $P_{(v_1,v_2)}$ è nulla $\Rightarrow 0 = 0$ (proposiz. verificata)

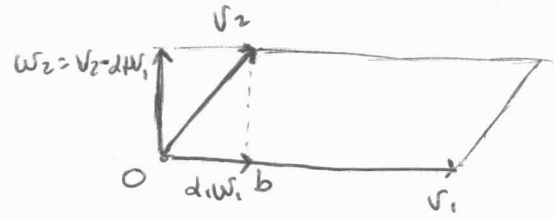
Se v_1, v_2 linearmente indipendenti



il volume di $P_{(v_1,v_2)}$ è la sua area in caso bidimensionale $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Area $P_{(v_1,v_2)} = b \cdot h$

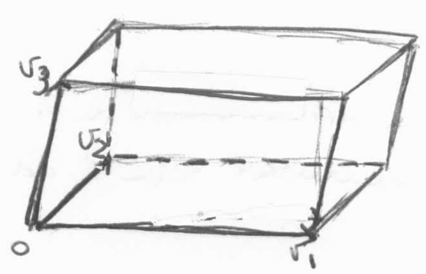
costruisco i vettori ortogonali w_1, w_2: $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 - \alpha_1 w_1$



$$\Rightarrow \sqrt{G(v_1,v_2)} = \sqrt{\|w_1\|^2 \|w_2\|^2} = \|v_1\| \, \|w_2\| = b \cdot h$$

2) Supposto vero fino a k, si dimostra per $k+1$ vettori:

considero i vettori $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$

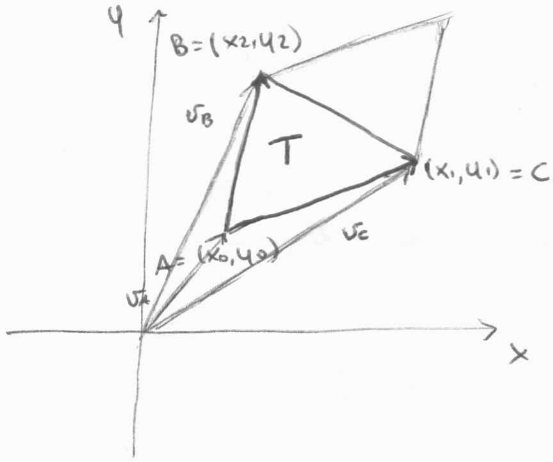


si trovano l'area di base e la si moltiplica per l'altezza w_3 (questo si fa in generale)

$$\operatorname{Vol} P_{(v_1,\dots,v_{k+1})} = \operatorname{Vol} P_{(v_1,\dots,v_k)} \cdot \|w_{k+1}\| =$$ per hp induttiva

$$= \sqrt{\|w_1\|^2 \cdots \|w_k\|^2} \cdot \|w_{k+1}\| = \sqrt{\|w_1\|^2 \cdots \|w_k\|^2 \, \|w_{k+1}\|^2} = \sqrt{G(v_1,\dots,v_{k+1})}$$

c.v.d.



Si vede che l'area del triangolo costruito su 2 vettori è la metà di quella di un parallelogramma costruito sugli stessi vettori: $V_B - V_A$ e $V_C - V_A$

Area triangolo $T = \dfrac{\sqrt{G(v_C - v_A, v_B - v_A)}}{2}$.

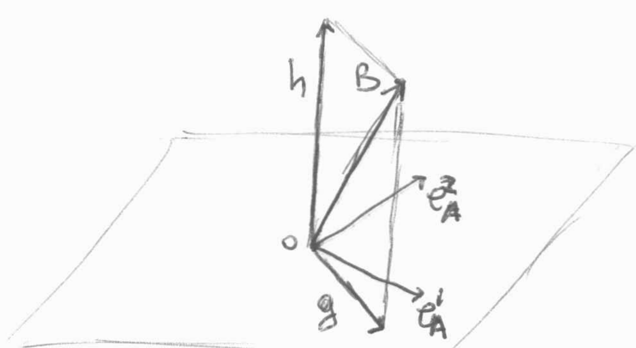
SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DETERMINANTE:

Sia data una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ e consideriamo i vettori riga R_i di tale matrice come vettori in uno spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ in cui è data una base ortonormale (ad esempio la base canonica $\mathcal{E}$): $\{e_1, \dots, e_n\}$, cioè $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ considero il vettore $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \Rightarrow G(v_1, \dots, v_n) = (\det A)^2$ cioè
$\det A = \sqrt{G(v_1, \dots, v_n)} = \mathrm{Vol}\, P_{(v_1, \dots, v_n)}$

RISOLUZIONE APPROSSIMATA DEI SISTEMI LINEARI

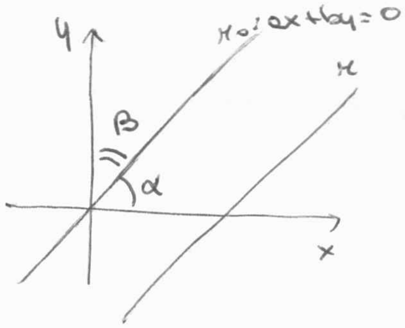
Sia dato un sistema lineare non omogeneo di K equazioni in n incognite non risolubile, $A \cdot X = B$ cioè $\mathcal{E}_A^1 x_1 + \mathcal{E}_A^2 x_2 + \dots + \mathcal{E}_A^n x_n = B$



$\Rightarrow$ cerco $B = g + h$ g proiezione ortogonale di B sul sottospazio $\langle\langle \mathcal{E}_A^1, \dots, \mathcal{E}_A^n \rangle\rangle$ e g ci darà la soluzione approssimata del sistema lineare non risolubile, $\|h\|$ è l'errore fatto sostituendo g a B nel cercare la soluzione del sistema

SI SOSTITUISCE g A B COME VETTORE DEI TERMINI NOTI E SI RISOLVE IL SISTEMA $A \cdot X = g$

Proprietà metriche del piano (che derivano dal fatto di avere una norma)



coseni direttori: sono i coseni degli angoli che la retta r_0 forma con gli assi (supposti ortogonali); rette r parallele a r_0 formano con gli assi gli stessi angoli formati da r_0

data $r: ax+by+c=0$

$$\Rightarrow \cos \hat{rx} = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \cos \hat{ry} = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Formula della distanza di un punto P in $\mathbb{R}^2$ euclideo dalla retta $ax+by+c=0$: (da ricavare per casa)