14/03/2012

Teorema: Sono equivalenti: dato $T: V \to V$ operatore, con $\dim V = n$

1) T è diagonalizzabile
2) Detti $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ gli autovalori di T ed $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_q}$ i corrispondenti autospazi $\Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_q} = V$
3) Le radici del polinomio caratteristico di T appartengono tutte al campo su cui è definito V e $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, q$

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che 1) $\Leftrightarrow$ 2) e 2) $\Leftrightarrow$ 3)

1) $\Rightarrow$ 2) $\exists \, \mathcal{B}_V$ formata da autovettori per T: $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

Supponiamo $v_1, \dots, v_r \in E_{\lambda_1}$, $v_{r+1}, \dots, v_e \in E_{\lambda_2}$ $\dots \Rightarrow \langle\langle v_1, \dots, v_r \rangle\rangle = U_1$

$\langle\langle v_{r+1}, \dots, v_e \rangle\rangle = U_2$

$\Rightarrow U_j \subseteq E_{\lambda_j}$ e $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_q = V \Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_q} = V \Rightarrow \sum_{j=1}^{q} \dim E_{\lambda_j} = n$

"$\Leftarrow$" Ipotesi: $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_q} = V$ Considero una base $\mathcal{B}_{E_{\lambda_j}}$ di ogni sottospazio E_{λ_j} e formo il sottoinsieme $\mathcal{B}$ costituito dai vettori di tali basi $\Rightarrow$ essendo tali vettori l. indipendenti ed esattamente n $\Rightarrow \mathcal{B}$ costituisce una base di V formata da autovettori.

2) $\Rightarrow$ 3) So che $\dim E_{\lambda_j} \leq \mu(\lambda_j)$ e che $\sum \dim E_{\lambda_j} = n$ ~~$\Rightarrow n = \sum_{j=1}^{q} \dim$~~

$\Rightarrow n = \sum_{j=1}^{q} \dim E_{\lambda_j} \leq \sum_{j=1}^{q} \mu(\lambda_j) = n \Rightarrow \sum_{j=1}^{q} \mu(\lambda_j) = n \Rightarrow \forall_j, \lambda_j$ sono nel campo considerato

$\Rightarrow \sum \dim E_{\lambda_j} = \sum \mu(\lambda_j) \Rightarrow \dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, q$

3) $\Rightarrow$ 2) ovvio dalle Ipotesi $\Rightarrow \sum \dim E_{\lambda_j} = \sum \mu(\lambda_j) = n \Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_j} = V$

Esercizio:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ voglio determinare A^K ~~Supponiamo~~

Supponiamo che A sia diagonalizzabile $\Rightarrow \exists \, S$ invertibile e una matrice diagonale $D \mid D = S^{-1}AS \Rightarrow A = SDS^{-1} \Rightarrow A^K = (SDS^{-1})^K = \underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1})\dots}_{K \text{ volte}} =$

$$= SD\underbrace{(S^{-1}S)}_{= I}D\underbrace{(S^{-1}S)}_{= I}D\underbrace{(S^{-1})\dots(S)}_{= I}DS^{-1} = SD^KS^{-1}$$

Esempio: $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[illegible]

ESERCIZIO: SI CONSIDERI LA MATRICE A_h COSÌ DEFINITA:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2-h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

1) determinare $h \in \mathbb{R} \mid rg(A_h) < 3$

2) posto $h=1$ determinare l'operatore T_1 associato ad A_1 e i suoi autovalori ed autospazi

3) T_1 è diagonalizzabile? Se sì determinare la matrice D diagonale e la matrice $S \mid D = S^{-1} A_1 S$

4) determinare A_1^{1226}.

1) $\begin{pmatrix} 1 & h^2-h & 1 \\ 0 & h & h \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \underset{\substack{h\neq 0 \\ R_3 = R_3/h-1 \\ R_2 = R_2/h}}{\overset{h\neq 1}{\simeq}} \begin{pmatrix} 1 & h^2-h & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_3=R_1-R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & h^2-h & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & h(h-1) & 0 \end{pmatrix}$

$\overset{R_3 = R_3/h^2-h}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & h^2-h & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3=R_2-R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & h^2-h & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ORA CALCOLIAMO IL RANGO PER $h=1$ e $h=0$:

per $h=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rgA_1 = 2$; per $h=0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rgA_0 = 1 \Rightarrow$

$rg A_h = 3 \ \forall h \in \mathbb{R} - \{0,1\}$. CALCOLIAMO IL RANGO COME ORDINE MASSIMO DEI MINORI NON NULLI: ANNULLIAMO IL DETERMINANTE:

$|A_h| = -h(h-1-(h-1)) + h(h-1)(h^2-h) = h^2(h-1)^2 = 0 \Rightarrow$ per $h=0$ e $h=1 \Rightarrow rg A_h < 3$

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fissata la base canonica in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow A_1 = [T]_e$

$[T(v)]_e = [T]_e [v]_e$ (L'UGUAGLIANZA vale per qualunque base $\mathcal{B}$ E NON SOLO PER LA BASE $\mathcal{E}$)

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_1(x,y,z) = (y+z, x+z, 0)$$

ORA CERCHIAMO GLI AUTOVALORI

$$|A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

Autovalori: $\lambda = 0 \ \mu(0) = 1$
$\lambda = 1 \ \mu(1) = 1$
$\lambda = -1 \ \mu(-1) = 1$

$E_0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$ retta

$\dim E_0 = 1 = \mu(0)$

$E_1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ retta

$E_{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$ retta

T_1 è diagonalizzabile. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. CONSIDERO IL CAMBIAMENTO DI BASE:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, e) \arrow[r, "{[T_1]_e = A_1}"] & (\mathbb{R}^3, e) \arrow[d, "{id;\,[id]_e^{\mathcal{B}}}"] \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[u, "{id}", "{[id]_{\mathcal{B}}^e}"'] \arrow[r, "{[T_1]_{\mathcal{B}} = D}"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

MATRICE ASSOCIATA AD id

$$\Rightarrow D = \underbrace{[id]_e^{\mathcal{B}}}_{S^{-1}} A_1 \underbrace{[id]_{\mathcal{B}}^e}_{S} \quad \text{ma } D = S^{-1}AS$$

La base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $[T_1]_{\mathcal{B}} = D$ è formata da autovettori.

Essendo $\mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_1 \oplus E_{-1}$ <u>bisogna rispettare l'ordine</u>

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$v_1 \in E_0 \Rightarrow v_1 = (1, 1, -1)$

$v_2 \in E_1 \Rightarrow v_2 = (1, -1, 0)$

$v_3 \in E_{-1} \Rightarrow v_3 = (1, -1, 0)$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{1226} = S D^{1226} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} \end{pmatrix}$$