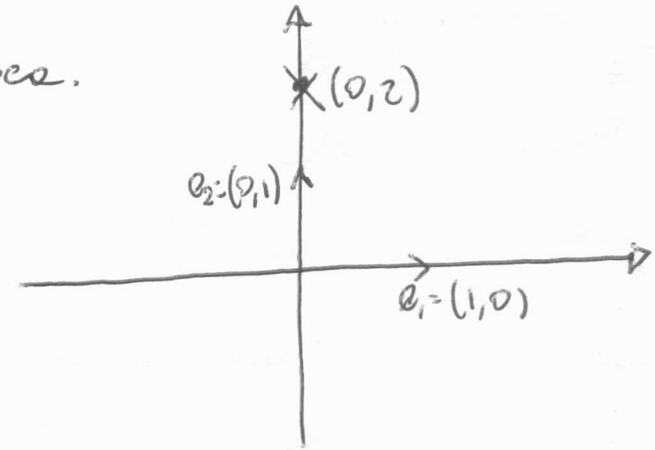
12-12-2011

Sia Σ un sistema lineare non omogeneo di p equazioni in n incognite. (Il sistema ha soluzione se e solo se rg matrice incompleta è = rg matrice completa). Trovare le soluzioni.

ESEMPIO: $x+y=2$ $(p=1, n=2)$. Una soluzione particolare è $\tilde{X}$ data da: $y=2-x \Rightarrow \tilde{X}=(0,2) \rightarrow$ questo punto è soluzione particolare del sistema NON OMOGENEO

Disegno il piano. Uso Base canonica.



Per trovare LE ALTRE soluzioni:

Prendo il sistema lineare omogeneo associato a Σ, indicato da Σ_0: $x+y=0 \Rightarrow$ la soluzione generale è: dato $y=-x$

$$\Rightarrow \begin{array}{c||c} y & x \\ \hline -s & s \end{array} \Rightarrow \{(s,-s) \mid s \in \mathbb{R}\}$$ $\rightarrow$ è la soluzione generale del sistema OMOGENEO

$\Rightarrow$ la soluzione generale di Σ è data dall'insieme $\{(s,-s) \mid s \in \mathbb{R}\} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in Sol(\Sigma) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un vettore generico dello SPAZIO DELLE soluzioni di Σ

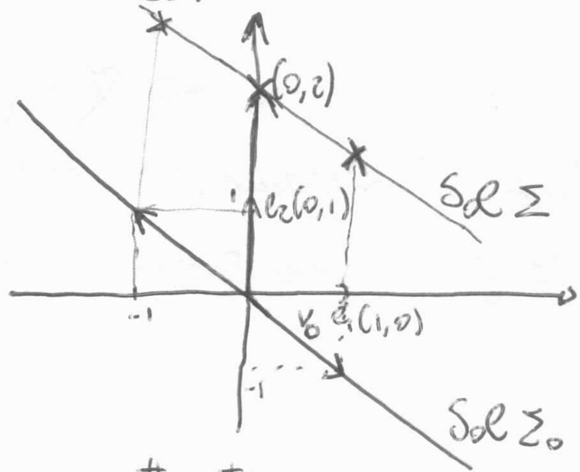
Infatti $\begin{cases} x = s \\ y = -s+2 \end{cases}$ é soluzione di Σ: (2)

$s + (-s+2) = 2 \Rightarrow \cancel{s} - \cancel{s} + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2$ IDENTITÀ

Analizziamo dal punto di vista geometrico:

$\{(s,-s) \mid s \in \mathbb{R}\} \rightarrow$ é una retta GENERATA DA $(1,-1) = v_0$

Sol $\Sigma \Rightarrow$ SPAZIO DELLE soluzioni del sistema Σ_0 traslato della soluzione particolare. $(0,2)$



Soluzioni di sistemi non omogenei sono ottenute dalle soluzioni del sistema omogeneo SOMMATE AD un vettore SOLUZIONE particolare DI Σ.
Si ottengono tutte così.

- DIMOSTRIAMO in generale che, DATO UN SISTEMA NON OMOGENEO Σ, ~~...~~ sommando una soluzione del sistema lineare omogeneo associato Σ_0 ad una soluzione particolare DI Σ OTTENIAMO UNA SOLUZIONE DI Σ:

1) Considero $\Sigma: AX = B$ e $\Sigma_0: AX = 0$.

$\Rightarrow$ sia V_0 soluzione di Σ_0 cioé $AV_0 = 0$ e $\tilde{X}$ soluzione di Σ

cioé $A\tilde{X} = B \Rightarrow A(V_0 + \tilde{X}) =$ per proprietà distributiva del PRODOTTO di matrici RISPETTO ALLA SOMMA

$= AV_0 + A\tilde{X} = 0 + B = B$

2) ORA DIMOSTRIAMO CHE OGNI SOLUZIONE DI Σ SI OTTIENE SOMMANDO UNA SOLUZIONE DI Σ_0 CON UNA PARTICOLARE DI Σ
SIA $\hat{X}$ UNA SOLUZIONE DI $\Sigma \Rightarrow$

Sia $\hat{X} \mid A\hat{X} = B \Rightarrow$ Data $V_0 \in Sol\Sigma_0$ si ha che (3)

$$AV_0 = 0 \Rightarrow A\hat{X} = B + 0 \Rightarrow A\hat{X} = B + AV_0 \Rightarrow A\hat{X} - AV_0 = B \Rightarrow$$

$\Rightarrow A(\hat{X} - V_0) = B$ Quindi $\hat{X} - V_0$ é soluzione del sistema lineare non omogeneo. E

Posto $\tilde{X} = \hat{X} - V_0 \Rightarrow \hat{X} = \tilde{X} + V_0$ c.v.d.

$Sol\ \Sigma$ é ottenuto dunque traslando $Sol\ \Sigma_0$.

- Una traslazione é una funzione così definita:

si fissa un vettore $a \in V$ spazio ambiente e si definisce TRASLAZIONE di vettore "a" la seguente applicazione:

$$t_a\ (\delta T_a) : V \longrightarrow V \qquad \forall\ v \in V$$
$$v \longrightarrow v + a$$

DEFINIZIONE:

Definiamo SOTTOSPAZIO AFFINE di V (spazio vettoriale) un sottoinsieme di V ottenuto mediante una traslazione di un sottospazio vettoriale di V.

Gli spazi delle soluzioni di sistemi lineari non omogenei sono sottospazi affini dello spazio ambiente: Se A é sottospazio affine di $V \Rightarrow \exists$ un vettore $a \in A$ e $W < V \mid A = a + W$

A é sottospazio vettoriale se e solo se a é vettore nullo $\Rightarrow$ passa per l'origine.

Dato A, $\exists ! W \mid A = a + W$; il sottospazio W è detto <u>DIREZIONE</u> o <u>GIACITURA</u> di A.

Quando si cerca direzione di una retta si cerca il sottospazio W di cui è traslata.

Qualunque elemento di A può essere preso ~~come~~ per individuare il vettore della traslazione.

$\Rightarrow$ il vettore a non è univocamente determinato.

(<u>DA DIMOSTRARE</u>: se $A = a + W \Rightarrow$ preso $b \in A \Rightarrow A = b + W$.

Dobbiamo dimostrare la doppia inclusione $\rightarrow a + W = b + W$)

<u>DEFINIZIONE</u>:

Due sottospazi affini A_1 e A_2 di uno spazio vettoriale V si dicono <u>paralleli</u> se posto $A_1 = a_1 + W_1$ e $A_2 = a_2 + W_2$ e supposto che $\dim W_1 \leq W_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_2$. $\Rightarrow$

AD ESEMPIO:

$\Rightarrow$ Due rette sono parallele quando hanno stessa direzione.

$\Rightarrow$ Retta e piano sono paralleli quando la direzione della retta è contenuta nella direzione del piano.

<u>OSSERVAZIONE</u>

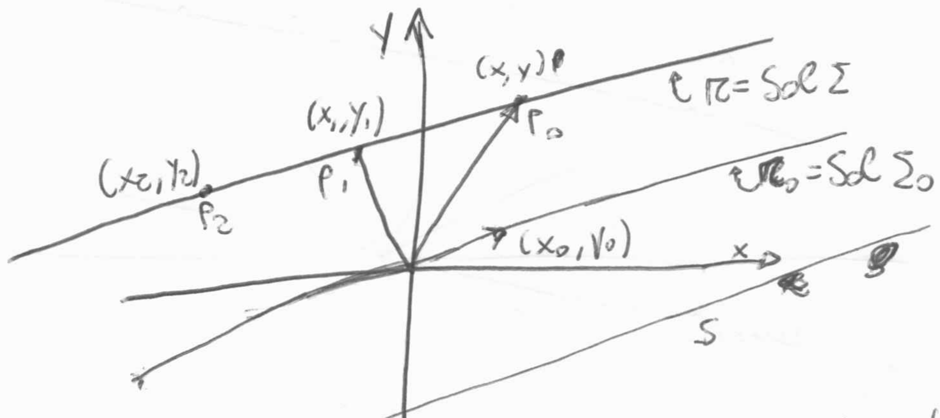
Si estende il concetto di dimensione ai sottospazi affini di uno spazio vettoriale V ponendo, se $A = a + W$, <u>$\dim A = \dim W$</u>.

STUDIAMO ORA LE RETTE NEL PIANO :

L'EQUAZIONE DI UNA RETTA È DEFINITA DA UN SISTEMA LINEARE, DI UNA EQUAZIONE IN DUE VARIABILI, IN GENERALE, NON OMOGENEA PERTANTO LA RETTA È UN SOTTOSPAZIO AFFINE DEL PIANO

Equazione retta generica nel piano:

$ax + by + c = 0 : \Sigma$



$\Sigma_0 \Rightarrow ax + by = 0$

PER QUANTO DETTO DEGLI SPAZI AFFINI : UN VETTORE GENERICO $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ DELLA RETTA È DATO DA :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Ricavo sistema scalare da equazione vettoriale.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = s x_0 + x_1 \\ y = s y_0 + y_1 \end{cases}$$ <u>equazione</u> <u>parametrica</u> della retta r.

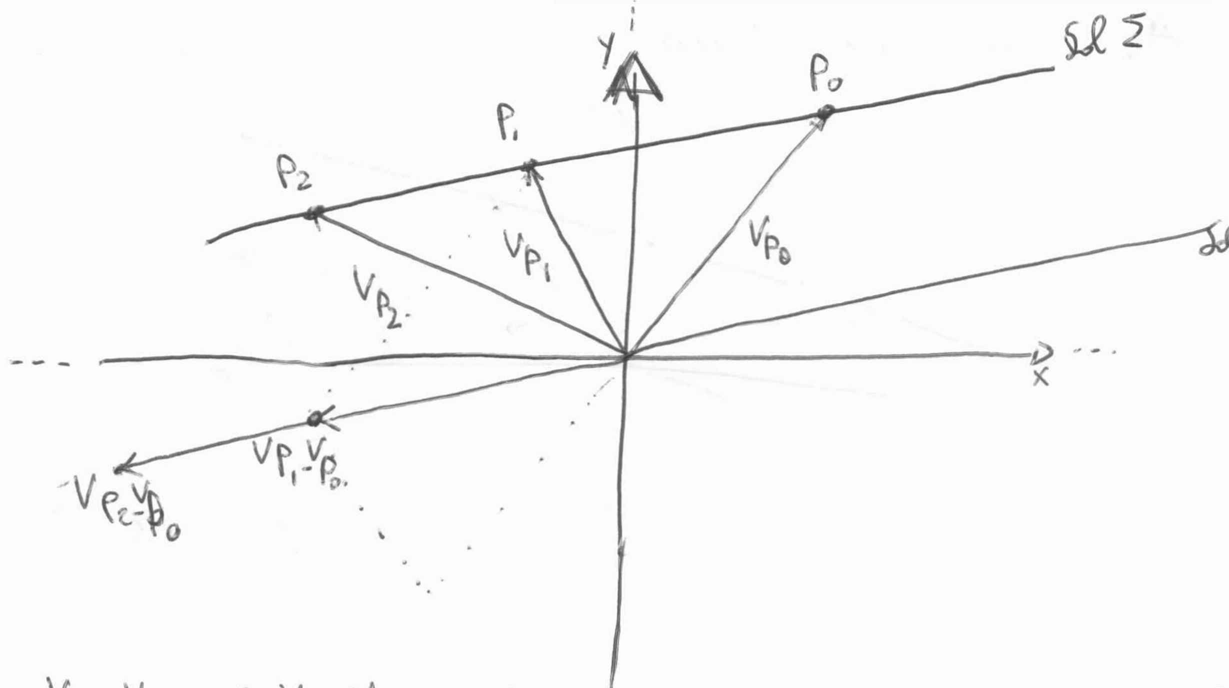
x_0 e y_0 sono i <u>parametri direttori</u> di r. Non sono univocamente determinati $\rightarrow$ sono determinati a meno di un parametro s.

~~Due~~ Due rette nel piano sono parallele se hanno la <u>stessa direzione</u> e quindi se hanno <u>parametri</u> <u>direttori</u> <u>proporzionali</u>.

- Tre punti di $\mathbb{R}^2$ $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ sono allineati quando? [<u>ESEMPIO</u>: $P_0 = (1, 2)$, $P_1 = (0, -1)$, $P_2 = (-1, -1)$]

SE CHIAMIAMO V_P IL VETTORE INDIVIDUATO DA P $\Rightarrow$

Come sono messi $V_{P_1} - V_{P_0}$ e $V_{P_2} - V_{P_0}$? SE I PUNTI P_0, P_1, P_2 SONO ALLINEATI ?



$\Rightarrow$ $V_{P_1}-V_{P_0}$ E $V_{P_2}-V_{P_0}$ STANNO SULLA STESSA RETTA PER L'ORIGINE E

Se

$V_{P_1}-V_{P_0}$; $V_{P_2}-V_{P_0}$ stanno sulla stessa retta per l'origine, $\Rightarrow$

$\Rightarrow (V_{P_2}-V_{P_0}) = \alpha(V_{P_1}-V_{P_0}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{pmatrix}$ deve avere rango 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ quindi il suo determinante deve essere zero.

$\Rightarrow$ deve essere zero il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & 0 \end{pmatrix},$$

ESSENDO $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}$

QUINDI:

Per vedere se sono punti allineati si crea la matrice

$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$ e si calcola il determinante ~~che~~: SE SONO ALLINEATI deve essere uguale a zero.

Se considero punto generico $P = (x, y)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ ⑦
$\Rightarrow$
essi sono allineati se $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ottengo così l'<u>equazione della retta</u>. CONSIDERO LA MATRICE EQUIVALENTE:

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ PONGO IL DETERMINANTE UGUALE A ZERO $\Rightarrow$

$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$

Posso fare anche IL DETERMINANTE DELLA MATRICE 2x2 $\Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ $\Rightarrow$ è l'<u>equazione di una retta passante per due punti</u>.