Lezione di Geometria 12-10-2011 foglio 1

- Dimostrazione prop. associativa tra matrici

Considero 3 matrici: $A_{k\times n}$; $B_{n\times h}$; $C_{h\times m}$

- faccio prodotto: $(A_{k\times n} \times B_{n\times h}) \times C_{h\times m}$

$$(AB)_{k\times h} \times C_{h\times m} = (ABC)_{k\times m} = P(p_{ij})$$

poi faccio prodotto $A_{k\times n}(B_{n\times h} \cdot C_{h\times m})$

$$A_{k\times n}(BC)_{n\times m} = (ABC)_{k\times m} = Q = (q_{ij})$$

Def. Due matrici $A = (a_{ij}) \in M_{k\times n}$ e $B = (b_{ij}) \in M_{k\times m}$
Sono uguali se $\boxed{a_{ij} = b_{ij}}$ $\underline{\forall i = 1, \dots, k;\ \forall j = 1, \dots, m}$

Dimostro che $p_{11} = q_{11}$, AD ESEMPIO.

p_{11} È DATO MOLTIPLICANDO LE ENTRATE DELLA PRIMA RIGA DI AB PER LE ENTRATE DELLA PRIMA COLONNA DI C

- Cerco elemento p_{11}: La matrice P é data dal prodotto di $(AB)C$.

$$\Big(\underbrace{(a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + \dots\dots + a_{1n}b_{n1})}_{\text{prima entrata della prima riga di A.B}},\ \underbrace{(a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2})}_{\text{seconda entrata della PRIMA RIGA di A.B}} \dots$$

$$\underbrace{(a_{11}b_{1h} + a_{12}\cdot b_{2h} + \dots + a_{1n}b_{nh})}_{\text{h-ESIMA entrata PRIMA riga DI AB}} \Big)$$

p_{11} si ricava moltiplicando LA PRIMA RIGA DI AB PER LA PRIMA COLONNA $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{h1} \end{pmatrix}$ DI C

Ora eseguo il prodotto tra $A(B\cdot C)=Q$ E CERCO q_{11}: CONSIDERO LA PRIMA COLONNA DI $B\cdot C$:

$$\begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}+\dots+b_{1h}\cdot c_{h1} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}\dots+b_{2h}c_{h1} \\ \vdots \\ b_{n1}c_{11}+b_{n2}c_{21}+\dots+b_{nh}c_{h1} \end{pmatrix}$$

MOLTIPLICHIAMO A SINISTRA

PER LA PRIMA RIGA DI A:

$$(a_{11}a_{12}\ \dots\dots\ a_{1n})$$

$$\boxed{a_{11}(b_{11}c_{11}+\dots+b_{1h}c_{h1})+a_{12}(b_{21}c_{11}+\dots b_{2h}c_{h1})+\dots+a_{1n}(b_{n1}c_{11}+\dots+b_{nh}c_{h1})}$$

, OTTENENDO COSÌ IL PRIMO ELEMENTO q_{11} DELLA MATRICE $Q=A(BC)$

Quindi si è dimostrato che p_{11} è uguale a q_{11}.
ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE $p_{ij}=q_{ij}\ \forall i=1,\dots,k;\ \forall j=1,\dots,m$
Queste due somme sono uguali poiché la somma gode in $\mathbb{R}$ della proprietà commutativa.

Quindi il prodotto tra matrici gode della proprietà ASSOCIATIVA

- Cerco elemento neutro:
- Considero la matrice quadrata identità avente la diagonale principale con tutti 1 e il resto con solo degli zeri: LA matrice identità È ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO?

$$I_n=\begin{pmatrix} 1&0&0&\dots&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ & & &1&0 \\ 0&0&0&\dots&1 \end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\dots$$

SE LA MATRICE $A\in M_{n\times n}$, QUADRATA $\Rightarrow I_n$ È L'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO IN $M_{n\times n}$.

SE CONSIDERO UNA MATRICE QUALUNQUE:

$$A=\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}}\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\qquad M_{k\times 2}$$

L'elemento neutro sinistro è diverso da quello destro: I_3

perché ..... non è lo stesso se questa matrice fosse a sinistra: $\nexists$ IL PRODOTTO

Lezione di Geometria 12-10-2011 foglio 2

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

- prendo 2 matrici A; B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}}$$

sono ≠ quindi nell'insieme delle matrici il prodotto non è COMMUTATIVO

- Esiste l'inverso di una matrice?

Data una matrice A (quadrata),

AD ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists$ l'inverso di A, A^{-1}?

cioè $\exists A^{-1} / AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

↑ matrice identità

Pongo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = \begin{pmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ 3x_1+4x_3 & 3x_2+4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ x_2+2x_4=0 \\ 3x_1+4x_3=0 \\ 3x_2+4x_4=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

→ risolvo la matrice e trovo l'inversa. CHE PER A DATA, ESISTE!

poi provo con

Data $B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ non esiste B^{-1}

Quindi non sempre esiste l'inverso di una matrice!

Trovo rango matrice $A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \overset{R_2=3R_1-R_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

2 PIVOT, RANGO = 2

$B\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \; R_2=2R_1-R_2 \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 1 PIVOT, RANGO = 1

OSSERVAZIONE:

Sono invertibili solo ~~...~~ matrici quadrate quando hanno il RANGO massimo!

DEFINIZIONE

- Il determinante di una matrice è un numero REALE, associabile solo a matrici quadrate: VEDIAMO COME CALCOLARLO!

- Il DETERMINANTE di una matrice A è un numero che possiamo associare solo a matrici $\boxed{\text{quadrate}}$: $\underbrace{Det(A);\ det(A),\ |A|}_{\text{modi per indicare il determinante}}$

Sviluppo del determinante secondo LAPLACE

Se $A \in M_{1\times1} \Rightarrow A \in \mathbb{R} \Rightarrow \det A = A$

Se $A \in M_{2\times2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Esempio: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1\cdot4-3\cdot2=\boxed{-2}$

$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 1\cdot4-2\cdot2=0$

Lezione di Geometria 12-10-2011 foglio 3

Cerco ~~il~~ Determinante matrici 3x3

Se $A \in M_{3\times 3} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = ?$

Scegliamo una riga o una colonna di A, ad esempio la prima riga

- prendo primo elemento della prima riga e idealmente tolgo la sua riga e la sua colonna, ottenendo così una sottomatrice di quella data, DI CUI CALCOLIAMO IL determinante; quindi lo moltiplico X l'elemento (a_{11}): $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

POI FACCIO LA STESSA COSA CON GLI ALTRI ELEMENTI DELLA RIGA E OTTENGO:

→ Somma indici elemento preso

$$\underbrace{|A| = (-1)^{1+1} a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\text{questo rappresenta il determinante della matrice 3x3}}$$

- Si dimostra che la scelta della riga o colonna non cambia il determinante della matrice

Esempio $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 + 6 = 8$

Scegliendo righe aventi degli zeri, i conti per calcolare il determinante della matrice si semplificano.

IN GENERALE:
- Indichiamo con $\hat{A}_{ij}$ la sottomatrice ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna; $\Rightarrow$ dato $A \in M_{n\times n} \Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\hat{A}_{ij}|$ ← sviluppo scegliendo la i-esima riga