Sia $T: V \longrightarrow V$ OPERATORE, con V sp. vettoriale n-dim $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $E_\lambda = \{ v \in V, v \neq 0, \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v \} \cup \{0\}$

È AUTOSPAZIO RELATIVO all'autovalore λ.

Gli autospazi sono sottospazi vettoriali dello spazio Ambiente V.

dim E_λ : $\underline{1 \leq \dim E_\lambda \leq n}$.

È sempre almeno 1 perché se fosse minore di 1 sarebbe l'origine. Tuttavia per la costruzione dell'insieme E_λ non esisterebbe.
D'altra parte se esiste un elemento $\in E_\lambda \Rightarrow$ anche tutti i suoi multipli vi appartengono. Perciò TUTTA la retta generata da tale vettore $\in E_\lambda \Rightarrow \dim E_\lambda = 1$.

- PROPOSIZIONE: $\dim E_\lambda \leq \mu(\lambda)$

Dimostrazione:
supponiamo che $\dim E_\lambda = k$ e $B_{E_\lambda} = \{ v_1, \dots, v_k \}$.
Estendiamo B_{E_λ} ad una Base di V, $B_V = \{ v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k} \} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [T]_{B_V} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n-k} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{21} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda & a_{k1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & b_{11} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-k1} & \dots & b_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$$

$T(v_1) = \lambda v_1$ Per ipotesi, $T(v_2) = \lambda v_2 \Rightarrow T(v_j) = \lambda (v_j)$ $\forall j = 1, \dots, k$.

$T(w_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{k1} v_k + b_{11} w_1 + \dots + b_{n-k1} w_{n-k}$

$$[T]_{B_V} - tI = \begin{pmatrix} \lambda - t & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - t & \dots & \vdots & \vdots & \dots & * \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda - t & * & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & b_{11} - t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & b_{n-k,n-k} - t \end{pmatrix} = (\lambda - t)^k q(t)$$

La molteplicità di $\lambda - t$ è almeno k, ma può essere anche maggiore, perché anche $q(t)$ può avere λ come radice $\Rightarrow \mu(\lambda) \geq k = \dim E_k$

ESERCIZIO:
Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono 2 autovalori distinti dell'operatore $T: V \rightarrow V \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo supponiamo che $\exists v \neq 0 \mid v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in E_{\lambda_1}$ e $v \in E_{\lambda_2} \Rightarrow T(v) = \lambda_1 v$ e $T(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0$

$\Rightarrow v(\lambda_1-\lambda_2)=0 \Rightarrow \lambda_1-\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$

ciò è assurdo perché contraddice l'ipotesi $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Quindi non $\exists$ nessun vettore $v \neq 0 \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$.

PROPOSIZIONE:

Autovettori che corrispondono ad autovalori diversi sono lin. indipendenti.
Per generalizzare si ragiona per induzione sul # di autovettori in esame.

DIMOSTRAZIONE:

- si parte dal più piccolo numero possibile:
(se $n=1$ il caso è banale)

Se $n=2$: siano $v_1, v_2 \in V \mid T(v_1)=\lambda_1 v_1$ e $T(v_2)=\lambda_2 v_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$
applico T $T(a_1 v_1 + a_2 v_2)=0 \Rightarrow a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1\lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0 \\ a_1 \lambda_2 v_1 + a_2 \lambda v_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ sottraggo membro a

membro e ottengo: $a_1 \lambda_1 v_1 + \cancel{a_2 \lambda_2 v_2} - a_1 \lambda_2 v_1 - \cancel{a_2 \lambda_2 v_2} = 0 \Rightarrow a_1 v_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$
Dato che $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$ per ipotesi $\Rightarrow a_1 = 0$.
inoltre $a_2 v_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$.

- Supponiamo ora di avere $n+1$ autovettori $v_1, \dots v_{n+1}$ che corrispondono ad autovalori diversi $\Rightarrow$ poniamo (*) $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + a_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow$
$T(a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1}) = 0 \Rightarrow a_1 \lambda v_1 + \dots + a_n \lambda_n v_n + a_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ moltiplichiamo (*) per λ_{n+1} e otteniamo: $a_1 \lambda_{n+1} v_1 + \dots + a_n \lambda_{n+1} v_n + a_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$
$\Rightarrow$ sottraendo membro a membro si ha $a_1 v_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) + \dots + a_n v_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0$
Ho n vettori e per ipotesi induttiva $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti $\Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} a_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0 \\ a_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ a_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0 \end{cases}$ ed essendo $(\lambda_j - \lambda_{n+1}) \neq 0 \; \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow a_j = 0 \; \forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ sostituendoli in (*) $\Rightarrow a_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow a_{n+1} = 0$ poiché $v_{n+1} \neq 0$ c.v.d.

OSSERVAZIONE:

Se $T: V \to V$ è un isomorfismo e $U \leq V$ è invariante per $T \Rightarrow U$ è invariante anche per T^{-1}.
DIMOSTRARE PER ESERCIZIO.

DEFINIZIONE:
una matrice $A \in M_{m \times m}$ è detta DIAGONALIZZABILE se è simile ad una matrice diagonale, cioè se $\exists S \in M_{m \times m}$ invertibile tale che, posta D la matrice diagonale di cui si parla, $D = S^{-1}AS$.

Analogamente un operatore $T: V \to V$ è DIAGONALIZZABILE se $\exists$ una base B_V tale che $[T]_{B_V}$ è DIAGONALE.

PROPOSIZIONE: un operatore $T: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ una base di V formata da autovettori di T.

DIMOSTRAZIONE: "$\Rightarrow$" T diagonalizzabile $\Rightarrow$ sia $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ la base rispetto alla quale $[T]_{B_V} = D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T(v_1) = a_{11}v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_m = a_{11}v_1 \Rightarrow v_1$ è autovettore per T.
$\vdots$
$T(v_m) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + a_{mm}v_m = a_{mm}v_m \Rightarrow v_m$ è autovettore per T.

SONO TUTTI AUTOVETTORI.

"$\Leftarrow$" si dimostra tornando indietro:
sia $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ la base di autovettori del testo $\Rightarrow T(v_j) = a_{jj}v_j \;\forall j = 1 \dots m$

$\Rightarrow [T]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = D \Rightarrow T$ è DIAGONALIZZABILE.

PROPOSIZIONE: Dato $T: V \to V$ operatore $\Rightarrow$ sono equivalenti:
1. T è diagonalizzabile
2. detti $\lambda_1 \dots \lambda_q$ gli autovalori di $T \Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_q} = V$
3. gli autovalori di T sono tutti scalari del campo su cui è definito V e $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j) \;\forall j = 1, \dots, q$

ESERCIZIO: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ è DIAGONALIZZABILE?

$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| [T]_e - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2 = (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}) \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{2}$ con $\mu(-\sqrt{2}) = 1$
$\lambda_2 = \sqrt{2}$ con $\mu(\sqrt{2}) = 1$

gli autovalori trovati sono scalari del campo ($\mathbb{R}$) su cui è definito V. La 3 VERIFICATA.
Nel caso in cui le radici sono semplici, l'uguaglianza esiste sempre.

Per la prop. precedente: l'operatore è diagonalizzabile. ④

$D \sim_s [T]_e$ è la matrice $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ formata dagli autovalori ripetuti tante volte quante la loro molteplicità.

Cerco $B_{\mathbb{R}^2}$ tale che $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}} = D$:

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\cancel{1}-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\sqrt{2})x + y = 0 = E_{\sqrt{2}}$$