11/01/2012

Sia $L: V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, con dim. $V = n$ e dim. $W = p$.

Sia $v \in V$, cerco $L(v)$: fissata una base B_V in V, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$

$$\underset{v \in V}{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n} \Rightarrow L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \cdot L(v_1) + \dots + \alpha_n \cdot L(v_n)$$

$\to$ L'immagine di un vettore V si può trovare come combinazione lineare delle immagini ~~della~~ DEI VETTORI base di V.

Fissiamo ora una base B_W di W: $B_W = \{w_1, \dots, w_p\} \Rightarrow L(v_j) = a_{j1} w_1 + \dots + a_{jp} w_p \ \ \forall j = 1, \dots n$

$$\cancel{L(v) = \underbrace{\alpha_1 (a_{11} w_1)}_{L(v_1)} + \alpha_2 (a_{21} w_1}$$

$$\underset{= (y_1, \dots, y_p)}{L(v)} = \alpha_1 \cdot \underbrace{(a_{11} w_1 + \dots + a_{1p} w_p)}_{L(v_1)} + \alpha_2 \cdot \underbrace{(a_{21} w_1 + \dots + a_{2p} w_p)}_{L(v_2)} + \dots + \alpha_n \underbrace{(a_{n1} w_1 + \dots + a_{np} w_p)}_{L(v_n)} =$$

$$= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_n a_{n1}) w_1 + (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{n2}) w_2 + \dots + (\alpha_1 a_{1p} + \alpha_2 a_{2p} + \dots + \alpha_n a_{np}) w_p$$

$$L(v) = (y_1, \dots, y_p) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_n a_{n1} = y_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{1p} + \alpha_2 a_{2p} + \dots + \alpha_n a_{np} = y_p \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le incognite sono rappresentate dagli α_j, quindi costruiamo la matrice DEI COEFFICIENTI

E RISCRIVIAMO MATRICIALMENTE IL SISTEMA:

$$\to \left[\underset{p \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}} = \underset{p \times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}} \right] \to$$

questa scrittura è analoga a: $L(v) = (y_1, \dots, y_p)$, pertanto, fissate le basi ~~di~~ B_V e B_W nel dominio e nel codominio di una applicazione lineare $L: V \to W$, si può sempre associare una matrice (che indichiamo con $[L]_{B_V}^{B_W}$), le cui colonne sono date dai coefficienti delle combinazioni lineari che esprimono l'immagine di ogni vettore di B_V nella base B_W. Essa è: "la matrice associata all'applicazione L nelle basi date":

$$\boxed{[L(v)]_{B_W} = [L]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V}}$$

Esempio 1: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y) \to (2x+y,\ x-y,\ x+3y)$

L'applicazione è sicuramente lineare, poiché LE COMPONENTI sono tutte costituite da polinomi omogenei di primo grado.

DIAMO: $B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Cerco $[L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$: $L((1,1)) = (3, 0, 4) \to$ ora dobbiamo scrivere il vettore $(3,0,4)$ secondo la base data di $\mathbb{R}^3$. $\Rightarrow$

DOBBIAMO RISOLVERE IL SISTEMA NON OMOGENEO CHE DERIVA DALL'EQUAZIONE VETTORIALE:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)}_{\text{RIDUCIAMO A GRADINI LA MATRICE COMPLETA ASSOCIATA}} \overset{R_1 - R_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{R_2^* - R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 + 2R_1}{\overset{R_3 - 2R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1/2 \\ \sim \\ R_2/(-2) \\ R_3/2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{7}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

QUESTI VALORI DETERMINANO LA PRIMA COLONNA DELLA MATRICE ASSOCIATA ALLA APPLICAZIONE LINEARE NELLE BASI DATE.

$$[L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

per ottenere la seconda colonna dobbiamo trovare i coefficienti della combin. lineare che esprime $L((1,2))$ secondo B_W, ovvero $B_{\mathbb{R}^3}$: ripetiamo dunque quanto fatto per il vettore $(3,0,4)$

$L((1,2)) = (4, -1, 7)$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo: $\alpha_1 = \frac{5}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ DA CUI: $[L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 7/2 & 5/2 \\ -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

Prendiamo ora $B_{\mathbb{R}^2} = \underbrace{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}}_{\text{BASE CANONICA}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $B_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [L]_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}} = ? \longrightarrow L((1,0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$L((0,1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

questo è già il vettore espresso secondo la base canonica di $\mathbb{R}^3$: questo è un grande vantaggio SOLO delle basi canoniche.

$$\Rightarrow [L]_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

- Esistono infinite matrici associate alla stessa applicazione lineare che dipendono dalle basi scelte. Questo però vale solo se le applicazioni sono LINEARI!!

- Date due applicazioni lineari componibili: $L_1 : V \to W$ e $L_2 : W \to U \Rightarrow$ considero la funzione composta $L_2 \circ L_1 : V \to U$ con $(L_2 \circ L_1)(v) = L_2(L_1(v)), \forall v \in V$.

$\to$ Dobbiamo innanzitutto verificare se la funzione composta $L_2 \circ L_1$ è ancora lineare: dimostriamo dunque che: 1) $(L_2 \circ L_1)(v_1 + v_2) = (L_2 \circ L_1)(v_1) + (L_2 \circ L_1)(v_2)$; $\forall v_1, v_2 \in V$

2) $(L_2 \circ L_1)(\lambda v) = \lambda((L_2 \circ L_1)(v))$. $\forall v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) $(L_2 \circ L_1)(v_1 + v_2) = L_2(L_1(v_1 + v_2)) = L_2(L_1(v_1) + L_1(v_2)) = L_2(L_1(v_1)) + L_2(L_1(v_2)) =$

$(L_2 \circ L_1)(v_1) + (L_2 \circ L_1)(v_2)$ c.v.d.

2) Da dimostrare. PER ESERCIZIO.

L'APPLICAZIONE COMPOSTA È LINEARE!.

Fissate le basi B_V, B_W, B_U, possiamo dunque associare una matrice ad $L_2 \circ L_1$: $[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_W}$. Abbiamo le matrici $[L_2]_{B_W}^{B_U}$ e $[L_1]_{B_V}^{B_W}$:

$$[(L_2 \circ L_1)(v)]_{B_U} = [L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} \cdot [v]_{B_V}$$

$$[L_2(L_1(v))]_{B_U} = [L_2]_{B_W}^{B_U} \cdot [L_1(v)]_{B_W} = \underbrace{[L_2]_{B_W}^{B_U} \cdot [L_1]_{B_V}^{B_W}} \cdot [v]_{B_V}$$

La matrice associata ALLA FUNZIONE COMPOSTA, è data dal prodotto tra le matrici di ciascuna applicazione COMPONENTE. Il prodotto non è commutativo, quindi attenzione al fatto che prima SI SCRIVE LA MATRICE ASSOCIATA alla seconda applicazione e poi la MATRICE ASSOCIATA ALLA PRIMA APPLICAZIONE LINEARE CHE SI COMPONE.

ESEMPIO

- Prendiamo la ~~matrice~~ applicazione identità: $id : V \to V$ $(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n)$

$v \to v$

Se considero nel (DOMINIO E NEL) codominio la base canonica di $V \Rightarrow [id]_{\mathcal{C}_V}^{\mathcal{C}_V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Se considero invece una base diversa da $\mathcal{C}_V$, allora la matrice risulta diversa DALLA MATRICE IDENTITÀ!

(d) Esempio 1: $id : (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}) \mapsto \left(\mathbb{R}^2, \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$

$$(x,y) \to (x,y) \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases}\lambda_2 = 1/2\\ \lambda_1 = 0\end{cases}$$

$$(1,0) \to (1,0)$$

$$(0,1) \to (0,1) \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$[id]^{B_{\mathbb{R}^2}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \to$$ DIVERSA DALLA BASE CANONICA!

Supponiamo di avere un'applicazione $L: V \to W$, fissate le basi B_V e B_W e la matrice $[L]^{B_W}_{B_V}$, cerco la matrice associata ad L in basi diverse (B'_V e B'_W) senza conoscere l'espressione analitica di L.

Bisogna lavorare solo con le matrici : COSTRUIAMO UN DIAGRAMMA COMMUTATIVO

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[d, "id_V"'] & (V, B_V) \arrow[r, "L"] & (W, B_W) \arrow[d, "id_W"] & \leftarrow [L]^{B_W}_{B_V} \\
v & (V, B'_V) \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "L"] & (W, B'_W) & \leftarrow [L]^{B'_W}_{B'_V} = ?
\end{tikzcd}$$

$v \longmapsto L(v)$

$$\begin{tikzcd}
h(x) \quad \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \quad f(h(x)) \arrow[d, "k"] \\
\mathbb{R} \arrow[u, "h"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \quad g(x) \quad k(f(h(x)))
\end{tikzcd}$$

$g(x) = k(f(h(x)))$

TALE DIAGRAMMA È DETTO COMMUTATIVO si può ottenere lo stesso ELEMENTO seguendo percorsi diversi.

Se si riesce ad ottenere uno SCHEMA del genere si crea un DIAGRAMMA ~~commutativo~~ di FUNZIONI.

Il modo più semplice è creare il diagramma con h e k funzioni identità.

SI HA : $L = id_W \circ L \circ id_V \implies$ la matrice associata ad L è uguale al prodotto delle matrici associate a tali funzioni : CIOÈ :

$$\implies [L]^{B'_W}_{B'_V} = [id_W]^{B'_W}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [id_V]^{B_V}_{B'_V}$$