PROPOSIZIONE (1)

Sia V spazio vettoriale nel campo K, supponiamo che $V = \langle\langle V_1 \dots V_n \rangle\rangle \Rightarrow$ se prendiamo l vettori $W_1, \dots, W_l$ con $l > n \Rightarrow W_1, \dots, W_l$ sono linearmente dipendenti

Dimostrazione: Posta $\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \dots + \alpha_l W_l = 0 \Rightarrow$ Voglio dimostrare che $\exists (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_l)$ tale che $\tilde{\alpha}_j \neq 0$ per almeno un $j \in \{1, \dots, l\}$

POICHÉ I W_j SONO COMBINAZIONI LINEARI DEI $V_1, \dots, V_n \Rightarrow$

$W_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} V_i \quad \forall j = 1, \dots, l$ con $a_{ij} \in K \ \forall i, j \Rightarrow \underbrace{\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1} V_i}_{\text{SOSTITUENDO}} + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2} V_i + \dots + \alpha_l \sum_{i=1}^{n} a_{il} V_i = 0$

RACCOGLIAMO I V_j

$\Rightarrow (\alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 a_{1,2} + \dots + \alpha_l a_{1,l}) V_1 + (\alpha_1 a_{2,1} + \alpha_2 a_{2,2} + \dots + \alpha_l a_{2l}) V_2 + \dots + (\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} \dots + \alpha_l a_{nl})$

Supponiamo che $V_1, \dots, V_n$ siano linearmente indipendenti $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 a_{1,1} + \dots + \alpha_l a_{1,l} = 0 \\ \alpha_1 a_{2,1} + \dots + \alpha_l a_{2,l} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \dots + \alpha_l a_{nl} = 0 \end{cases}$ $V_n = 0$

Voglio risolvere un sistema lin. omogeneo di n equazioni e l incognite con $l > n \Rightarrow rg \max = n \Rightarrow \dim sol \Sigma_0 = \#$ variabili $- rg \Sigma_0 =$

$l - rg \Sigma_0 > 0$ sempre per l'impostazione $\Rightarrow \exists (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_l)$ con $\tilde{\alpha}_j \neq 0$ per almeno un j.

COME VOLEVAMO DIMOSTRARE. INVECE

Se $V_1, \dots, V_n$ sono l. dipendenti $\Rightarrow$ i vettori l. indipendenti fra di loro generano tutto $V \Rightarrow V = \langle\langle V_1 \dots V_K \rangle\rangle$ con $K < n \Rightarrow$ essendo $l > n \Rightarrow l > K$

possiamo ripetere quanto dimostrato per i K vettori LIN. INDIPENDENTI.

c.v.d.

Corollario

dati i vettori $V_1 \dots V_n \in V$, vettori l. indipendenti e preso $W \in V$ si ha che

SE $V_1, \dots V_n, W$ sono ancora l. indipendenti $\Rightarrow W \notin \langle\langle V_1 \dots V_n \rangle\rangle$

Proposizione: fissata una base B di uno spazio vettoriale $V \Rightarrow$ ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B

Dim: Sia $B = \{V_1 \dots V_n\}$ Per assurdo supponiamo che W si possa scrivere come DUE COMBINAZIONI LINEARI DEI $V_1, \dots, V_n$ CON COEFFICIENTI DIVERSI $\alpha_1 \dots \alpha_n$ e $\beta_1, \dots, \beta_n$

$W = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n$ E $W = \beta_1 V_1 + \dots + \beta_n V_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n = \beta_1 V_1 + \dots + \beta_n V_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 V_1 + \dots \alpha_n V_n - \beta_1 V_1 - \dots - \beta_n V_n = 0 \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) + \dots + (\alpha_n - \beta_n) V_n = 0$

POICHÉ $V_1, \dots, V_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n = \beta_n \end{cases}$$

Come volevasi dimostrare
C.V.D

__Definizione__: i coefficienti di tale unica comb. lineare sono le COMPONENTI o COEFFICIENTI del vettore nella base $\mathcal{B}$ e scriveremo, dato $V = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n$, $[V]_B$

$$[V]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO DI BASE:

I vettori $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, V_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ detta __Base Canonica__ : $\mathcal{C}$.

Per far vedere ~~una base~~ (CHE UN INSIEME DI VETTORI FORMANO) ~~Bisogna dimostrare~~ che $V_1 \dots V_n$ sono 1) l. indipendenti e 2) GENERANO $\mathbb{R}^n$. DIMOSTRIAMO CHE $\mathcal{C}$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$

1) pongo $\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ per tanto $\alpha_j = 0 \ \forall j \Rightarrow$ sono linearmente indipendenti

2) sono generatori di $\mathbb{R}^n$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \dots + \beta_n V_n =$

$= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \beta_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

due vettori sono uguali se hanno le stesse componenti quindi : $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2 \dots x_n = \beta_n$. allora sono generatori di $\mathbb{R}^n$ PERCHÉ ESSENDO $\beta_j = x_j \ \forall j = 1 \dots n$; ABBIAMO TROVATO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE!

OSSERVAZIONE:
se la base è canonica le coordinate del vettore $[V]_B$ coincidono con i coefficienti della combinazione lineare di V nella base $\mathcal{B}$. $\mathcal{C}$ = Base Canonica

Proposizione:

In uno spazio vettoriale V esistono infinite basi

Proposizione: due basi DIVERSE di uno spazio vettoriale V, hanno lo stesso numero d'elementi (cioè la stessa cardinalità) spazio vettoriale reale

DIMOSTRAZIONE: siano B_1 e B_2 due basi di V $B_1 = \{V_1 \dots V_K\}$ $B_2 = \{W_1 \dots W_h\}$

supponiamo $K \neq h$, $K < h \Rightarrow V_1 \dots V_K$ sono linearmente indipendenti e generano V POICHÉ FORMANO UNA BASE $\Rightarrow$ per la proposizione precedente i vettori $W_1 \dots W_h$ sono linearmente dipendenti; MA B_2 è base E QUINDI SIAMO GIUNTI AD UN ASSURDO QUINDI $K \not< h$! MA ALLORA PUÒ ESSERE $h < K$, MA: se $h < K$ considero la base $B_2 \Rightarrow V = \langle\langle W_1 \dots W_h \rangle\rangle \Rightarrow$ LA proposizione precedente AFFERMA che i vettori $V_1 \dots V_K$ sono linearmente dipendenti, ma questo è assurdo perché B_1 è base $\Rightarrow h = K$ C.V.D

Definizione: si dice dimensione dello spazio vettoriale V la cardinalità di una sua base QUALUNQUE.

Osservazione: per determinare la base di uno spazio n dimensionale "basta" trovare n vettori linearmente indipendenti

Proposizione: in uno spazio vettoriale n dimensionale dati r vettori l. ind. con $r \leq n$, $\exists$ $n-r$ vettori l. ind. che con i precedenti formano una base di V

Dim: sia $W = \langle\langle V_1 \dots V_r \rangle\rangle \Rightarrow$ se $W \equiv V \Rightarrow$ abbiamo finito se $W \subsetneq V \Rightarrow$ $\exists$ almeno un vettore $u_1 \notin W \Rightarrow u_1$ non è combinazione lineare dei $V_1 \dots V_r \Rightarrow V_1 \dots V_r, u_1$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ considero $W_1 = \langle\langle V_1, \dots V_r, u_1 \rangle\rangle$ se $W_1 \equiv V$ abbiamo finito $\Rightarrow$ altrimenti ...

il procedimento termina quando abbiamo trovato n vettori e ci arriviamo perché n è un numero finito

c.v.d.