Appunti di Geometria del 9 - 5 - '12

Osservazioni sul complemento ortogonale

- Poiché il prodotto scalare non ha vettori isotropi non nulli, essendo definito come forma bilineare reale simmetrica definita positiva, ovvero la $g(v,v)$ é sempre maggiore di zero, $\forall v \neq 0$, per definizione, si avrá che, dato un sottospazio vettoriale W k-dimensionale di uno spazio vettoriale V n-dimensionale, esiste sempre il suo complemento ortogonale $W^\perp$.

- Tale complemento ortogonale, $W^\perp$, é un sottospazio vettoriale di V (euclideo) con dimensione $n-k$ tale che $W \oplus W^\perp = V$.

- NE CONSEGUE: $\forall v \in (V, \text{euclideo})$, esistono un $g \in W$ ed un $h \in W^\perp$, con g e h proiezioni ortogonali di v rispettivamente su W e $W^\perp$, tali che $v = g + h$.

Introduzione ai coefficienti di Fourier

Vediamo un metodo generale per determinare le proiezioni ortogonali di $v \in (V, \text{euclideo})$ in un sottospazio vettoriale $W = \langle\langle w_1, \dots, w_k \rangle\rangle$.
Dato v, determiniamo $g \in W$ e $h \in W^\perp$ in modo tale che $g + h = v$ in questo modo:

- esprimiamo $g \in W$ come combinazione lineare, $g = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_k w_k$, da cui segue che $h = v - g = v - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_k w_k$,

- per la bilinearitá, é sufficiente imporre che h sia ortogonale ai vettori di base di W, ovvero che il prodotto scalare $h \cdot w_j = 0$, $\forall j = 1, \dots, k$,

- così, essendo noto v e i vettori di base di W, posso risolvere il sistema che mi permette di trovare i coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, noti anche come coefficienti di Fourier.

- Tale sistema, lineare non omogeneo di k equazioni e k incognite, è fatto in questo modo,

$$\begin{cases} (v - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_k w_k) \cdot w_1 = 0 \\ (v - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_k w_k) \cdot w_2 = 0 \\ \vdots \\ (v - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_k w_k) \cdot w_k = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v \cdot w_1 - \alpha_1 w_1 \cdot w_1 - \dots - \alpha_k w_k \cdot w_1 = 0 \\ v \cdot w_2 - \alpha_1 w_1 \cdot w_2 - \dots - \alpha_k w_k \cdot w_2 = 0 \\ \vdots \\ v \cdot w_k - \alpha_1 w_1 \cdot w_k - \dots - \alpha_k w_k \cdot w_k = 0 \end{cases}$$

è un sistema risolubile? Sì, poiché analizzando la matrice incompleta associata al sistema, A, essa ha rango $= k$ e determinante maggiore di zero.
POICHE' E' LA MATRICE ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE IN UNA BASE DATA DI W

$$A = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_1 & \dots & w_k \cdot w_1 \\ w_1 \cdot w_2 & w_2 \cdot w_2 & \dots & w_k \cdot w_2 \\ & \vdots & & \\ w_1 \cdot w_k & w_2 \cdot w_k & \dots & w_k \cdot w_k \end{pmatrix}$$

Quando una matrice ha rango massimo e det. > 0, ci sono i presupposti per risolvere il sistema associato, con il metodo di Cramer. POICHE IL RANGO DELLA MATRICE INCOMPLETA E' MASSIMO E UGUALE AL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA

- Se però la base di W è ortogonale, si annullano la maggiorparte dei prodotti scalari, e determinare i coeff. α_i, $\forall i$, diventa immediato, infatti il sistema si riduce a:

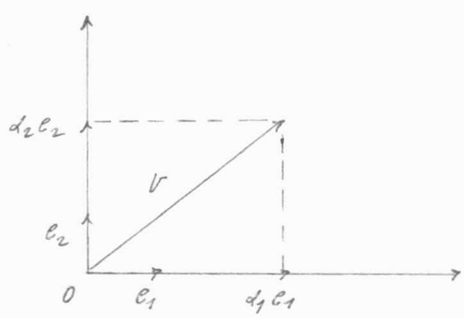
$$\begin{cases} v \cdot w_1 - \alpha_1 w_1 \cdot w_1 = 0 \\ v \cdot w_2 - \alpha_2 w_2 \cdot w_2 = 0 \\ \vdots \\ v \cdot w_k - \alpha_k w_k \cdot w_k = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \\ \vdots \\ \alpha_k = \dfrac{v \cdot w_k}{w_k \cdot w_k} \end{cases}$$

QUESTI SI CHIAMANO COEFFICIENTI DI FOURIER

Analizziamo meglio i coefficienti di Fourier

- Dato un $v \in \mathbb{R}^n$, tali coefficienti definiscono le componenti del vettore lungo le direzioni definite dai vettori di una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

- Se la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale come ad esempio la base canonica C, i coeff. di Fourier sono dati semplicemente dai prodotti scalari $v \cdot v_j$, che ci danno direttamente le componenti del vettore lungo le direzioni individuate dai v_j, $\forall j$. Pertanto $\alpha_j = v \cdot v_j$, come si vede facilmente in $\mathbb{R}^2$:



Dimostrare che vettori ortogonali sono linearmente indipendenti (PER ESERCIZIO)

DIMOSTRAZIONE:

- Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ due vettori ortogonali, entrambi diversi dal vettore nullo, dimostriamo allora che, se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, con α_1, α_2 numeri reali, deve essere necessariamente che $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

- Moltiplichiamo scalarmente l'equazione per v_1, $\alpha_1 v_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_1 \cdot v_2 = 0$, per ipotesi, essendo v_1, v_2 ortogonali, il prodotto scalare $v_1 \cdot v_2 = 0$, per cui rimane $\alpha_1 v_1 \cdot v_1 = \alpha_1 \|v_1\|^2 = 0$

- Poiché v_1 è non nullo per ipotesi, anche la sua norma al quadrato è diverso da zero, per cui necessariamente $\alpha_1 = 0$. In modo analogo, moltiplicando scalarmente per v_2, si dimostra che è $\alpha_2 = 0$.

- La dimostrazione si estende in modo immediato a n vettori ortogonali tra loro.

Come si determina una base ortonormale, $B_{\perp n}$, in uno spazio euclideo?

- Occorre trovare una base ortogonale, $B_{\perp}$, e normalizzare i vettori di tale base.

- Normalizzare un vettore v significa trovare il suo multiplo di norma unitaria, ovvero il versore $\hat{v}$. Un qualsiasi v non nullo può essere normalizzato semplicemente dividendo v per la sua norma

Come si determina pertanto una base ortogonale, $B_{\perp}$?

- In $\mathbb{R}^3$ possiamo cercare per tentativi dei vettori che siano ortogonali a due a due, avendo dimostrato che se sono ortogonali sono anche lin. ind., ma se siamo in $\mathbb{R}^n$, TALE METODO E' TROPPO LUNGO SE N E' GRANDE: devo necessariamente utilizzare un altro metodo più generale, che sfrutta la possibilità di passare da una qualsiasi base di partenza non ortogonale, ad una ortogonale.

Metodo di Gram-Schmidt

- Proposizione: siano dati $v_1, \dots, v_k$ vettori lin. ind in $\mathbb{R}^n$ euclideo, con $k \leq n$, allora esistono $w_1, \dots, w_k$ vettori ortogonali a due a due tali che lo spazio generato dai $\langle\langle w_1, \dots, w_j \rangle\rangle$ coincide con lo spazio generato dai $\langle\langle v_1, \dots, v_j \rangle\rangle$, $\forall j = 1, \dots, k$.

- Inoltre, se $z_1, \dots, z_k$ sono altri vettori di $\mathbb{R}^n$ che verificano la stessa tesi, essi sono necessariamente multipli dei w_j, ovvero $z_j = \alpha_j w_j$, $\forall j = 1, \dots, k$.

Dimostrazione per induzione su k

1) Verifico per $k=1$, semplice, prendo $w_1 = v_1$, é ovvio che esiste e coincide.

2) Verifico per $k=2$, poiché dati v_1, v_2 voglio determinare i w_1, w_2, agisco così:

- prendo $w_1 = v_1$ e considero il sottospazio $W_1 = \langle\langle w_1 \rangle\rangle$,
- allora esiste un $W_1^{\perp}$ tale che $W_1 \oplus W_1^{\perp} = \mathbb{R}^n$, per cui v_2 può essere scomposto nella somma di un vettore multiplo di w_1 che sta in W_1, più il suo complemento ortogonale, ovvero $v_2 = \alpha_1 w_1 + w_2$, con w_1 ortogale a w_2.
- Si ha quindi che, $w_2 = v_2 - \alpha_1 w_1$, con $w_1 \circ w_2 = 0$, da cui si trova:

$$w_1 \circ w_2 = (v_2 - \alpha_1 w_1) \circ w_2 = 0 \longrightarrow v_2 \circ w_1 = \alpha_1 w_1 \circ w_1 \longrightarrow \alpha_1 = \frac{v_2 \circ w_1}{w_1 \circ w_1} = \frac{v_2 \circ w_1}{|w_1|^2}$$

- Inoltre sappiamo che $\langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$ é contenuto in $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$, in quanto $w_1 \& w_2 \in \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$, e analogamente $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \subseteq \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$ poiché $v_1 = w_2$ e $v_2 \in \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$. Da qui la coincidenza tra i due spazi $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle, \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$.

3) Supposta vera la preposizione fino a $k=j$, dimostriamola per $k=j+1$:

- dati $v_1, \dots, v_{j+1}$, sono già stati determinati i $w_1, \dots, w_j$ tali che $w_m \circ w_l = 0$, $\forall l, m = 1, \dots, j$, con $l \neq m$, e inoltre $\langle\langle w_1, \dots, w_l \rangle\rangle = \langle\langle w_1, \dots, w_m \rangle\rangle$, $\forall l = 1, \dots, j$,

- considero ora v_{j+1} e $W_j = \langle\langle w_1, \dots, w_j \rangle\rangle$, e come prima decompongo v_{j+1} nella somma di $g \in W_j$ e $h \in W_j^{\perp}$, ovvero $v_{j+1} = g + h$. . PONGO $w_{j+1} = h$

- pertanto $w_{j+1} = v_{j+1} - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_j w_j$, con $w_{j+1} \circ w_l = 0$, $\forall l = 1, \dots, j$, e inoltre $w_{j+1} \in \langle\langle v_1, \dots, v_{j+1} \rangle\rangle$ e $v_{j+1} \in \langle\langle w_1, \dots, w_{j+1} \rangle\rangle$. Da qui la coincidenza tra i due spazi $\langle\langle v_1, \dots, v_{j+1} \rangle\rangle$ e $\langle\langle w_1, \dots, w_{j+1} \rangle\rangle$.

- I coeff. di Fourier si determinano con TALE procedimento analogamente a prima.

Esercizio, determinare una base ortonormale, B_{Ln}, di $\mathbb{R}^3$ (diversa da quella canonica, C)

SIA $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1, v_2, v_3 \in (\mathbb{R}^3, \text{euclideo})$, e linearmente indipendenti.

- Verifico che v_1, v_2, v_3 non siano tra loro ortogonali:

$v_1 \cdot v_2 = (1 \cdot 2) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 3) \neq 0$

$v_1 \cdot v_3 = (1 \cdot 2) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) \neq 0$

$v_2 \cdot v_3 = (2 \cdot 2) + (0 \cdot 1) + (3 \cdot 0) \neq 0$

- Trovo una base ortogonale, $B_\perp = \{w_1, w_2, w_3\}$, con il metodo di Gram-Schmidt:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha_1 = \frac{v_2 \cdot w_1}{|w_1|^2} = \frac{(1 \cdot 2) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 3)}{\left(\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}\right)^2} = \frac{5}{3},$$

$$w_2 = v_2 - \alpha_1 w_1 = v_2 - \alpha_1 v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 5/3 \\ 0 - 5/3 \\ 3 - 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \beta_1 = \frac{v_3 \cdot w_1}{|w_1|^2} = \frac{(2 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 1)}{\left(\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}\right)^2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{e } \beta_2 = \frac{v_3 \cdot w_2}{|w_2|^2} = \frac{(2 \cdot 1/3) - (1 \cdot 5/3) + (0 \cdot 4/3)}{\left(\sqrt{(1/3)^2 + (-5/3)^2 + (4/3)^2}\right)^2} = \frac{-1}{42/9} = -9/42$$

β_1, β_2 sono i coeff. di Fourier di v_3, rispettivamente nelle direzioni di w_1 e w_2.

$$w_3 = v_3 - \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{42} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135/126 \\ -45/126 \\ -90/126 \end{pmatrix}$$

- Verifico che w_1, w_2, w_3 siano a due a due ortogonali:

$$w_1 \cdot w_2 = \left(1 \cdot \tfrac{1}{3}\right) - \left(1 \cdot \tfrac{5}{3}\right) + \left(1 \cdot \tfrac{4}{3}\right) = 0$$

$$w_1 \cdot w_3 = \left(1 \cdot \tfrac{135}{126}\right) - \left(1 \cdot \tfrac{45}{126}\right) - \left(1 \cdot \tfrac{90}{126}\right) = 0$$

$$w_2 \cdot w_3 = \left(\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{135}{126}\right) + \left(\tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{45}{126}\right) - \left(\tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{90}{126}\right) = 0$$

- Normalizzo w_1, w_2, w_3

$$\hat{w}_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\hat{w}_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{3}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{42} \\ -5/\sqrt{42} \\ 4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

$$\hat{w}_3 = \frac{w_3}{|w_3|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\tfrac{135}{126}\right)^2 + \left(-\tfrac{45}{126}\right)^2 + \left(-\tfrac{90}{126}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 135/126 \\ -45/126 \\ -90/126 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/14 \\ 1/42 \\ 1/21 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \mathcal{B}_{\perp n} = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3\}$$