09/01/2012

Siano V e W spazi vettoriali sul campo K. Un'applicazione lineare è un morfismo tra tali spazi vettoriali cioè un'applicazione $L: V \to W$ è lineare se verifica le proprietà:

$L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

$L(\alpha v) = \alpha L(v) \quad \forall v \in V \text{ e } \alpha \in K$

Esempio

presi $V = W = \mathbb{R}^2$ $\quad L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (2x+y, x-y)$: è lineare?

Siano $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ $\Rightarrow L(v_1+v_2) = L((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2), x_1+x_2-(y_1+y_2))$

$L(v_1)+L(v_2) = (2x_1+y_1, x_1-y_1)(2x_2+y_2, x_2-y_2) =$
$= (2x_1+y_1+2x_2+y_2, x_1-y_1+x_2-y_2)$

$L(\alpha v) = \alpha L(v) \Rightarrow$ preso $v = (x,y)$ $\quad L(\alpha v) = L(\alpha(x,y)) = L((\alpha x, \alpha y)) = (2\alpha x+\alpha y, \alpha x-\alpha y)$

$\alpha L(v) = \alpha L((x,y)) = \alpha(2x+y, x-y) = (2\alpha x+\alpha y, \alpha x-\alpha y)$

$\Rightarrow L$ è lineare

OSSERVAZIONE

Un'applicazione tra spazi vettoriali, data mediante la sua espressione analitica, è lineare $\Leftrightarrow$ le sue componenti sono polinomi omogenei di primo grado nelle coordinate del dominio.

DEFINIZIONE

Data l'applicazione $L: V \to W$ il NUCLEO o KERNEL di L, abbreviato in $\ker L$ (NL o NcL) l'insieme $\ker L = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$ cioè $\ker L = L^{-1}(0)$

Si dimostra che $\ker L$ è un sottospazio vettoriale di V (è chiuso rispetto alle operazioni dello spazio vettoriale) $\to \ker L < V$ (da dimostrare)

DEFINIZIONE

L'IMMAGINE di $L: V \to W$, abbreviato $\mathrm{Im}L$ (oppure $L(V)$) è l'insieme

$\mathrm{Im}L = \{w \in W \mid \exists\, v \in V \text{ con } L(v) = w\}$

Dimostrare che $\mathrm{Im}L < W$

Proposizione:

Data l'applicazione lineare $L: V \to W$ si ha:

1) $L(0^{\text{dominio}}) = 0_{\text{codominio}}$
2) $L(-v) = -L(v) \quad \forall v \in V$
3) L è iniettiva $\Leftrightarrow \ker L = \{0\}$

Dimostrazione: ②

1) $L(0) = L(0+0) = L(0) + L(0) \Rightarrow -L(0) + L(0) = -L(0) + L(0) + L(0)$
$$\underset{0}{\overset{\|}{-L(0)+L(0)}} = 0 + L(0) = L(0)$$
$$\Rightarrow 0 = 0 + L(0) = L(0)$$

2) $0 = L(0) = L(v + (-v)) = L(v) + L(-v)$
$\Rightarrow L(-v) = -L(v)$

3) "$\Rightarrow$" $\ker L = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$ Sia $v \in \ker L \Rightarrow L(v) = 0$ ma anche $L(0) = 0$
quindi $L(v) = L(0)$ ma siccome l'applicazione L iniettiva per ipotesi $\Rightarrow v = 0$

"$\Leftarrow$" siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow L(v_1) - L(v_2) = 0 \Rightarrow L(v_1 - v_2) = 0$
$v_1 - v_2 \in \ker L \Rightarrow$ per ipotesi $v_1 - v_2 = 0$ quindi $v_1 = v_2$ c.v.d.

Si può pertanto verificare che un'applicazione sia INIETTIVA studiandone il nucleo.

Esempio:
$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (2x+y, x-y)$ è iniettiva?
$\ker L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid L(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x+y, x-y) = (0,0)\} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

matrice associata $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ rango $= 2$ $\quad 2-2=0$ nel nucleo c'è solo il vettore nullo
$rg\,\Sigma_0 = 2$ $\quad \dim sol\,\Sigma_0 = 2-2 = 0 \Rightarrow L$ è iniettiva

è un isomorfismo?
occorre sapere se è suriettiva $\to$ studiamo la dimensione di $\mathrm{Im}L$
L è suriettiva $\to \mathrm{Im}L = \mathbb{R}^2$?
Sia $w \in \mathbb{R}^2$ codominio di $L \Rightarrow w = (s,t) \Rightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ dominio $\mid L((x,y)) = (s,t)$?
cioè $(2x+y) = (s,t)$ qualunque siano s,t?

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y = s \\ x-y = t \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & s \\ 1 & -1 & t \end{array}\right)$

per Rouché-Capelli il sistema ha soluzione se i ranghi delle matrici sono eguali

hanno entrambe rango 2 $\to$ il sistema ha soluzione per qualunque valore di s e t

L è suriettiva
Pertanto è un isomorfismo.

TEOREMA DELLE DIMENSIONI:

Sia $L: V \to W$ un'applicazione lineare $\to \dim\ker L + \dim \mathrm{Im}L = \dim V$

Dimostrazione
Poniamo $\dim V = n$, $\dim W = p$, $\dim\ker L = k$, $k \leq n$, $\dim \mathrm{Im}L = r$, $r \leq p$
Siano $\mathcal{B}_{\ker L} = \{u_1, \dots, u_k\}$ $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}L} = \{w_1, \dots, w_k\} \Rightarrow \exists v_1, \dots, v_r \in V \mid L(v_j) = w_j \ \forall j = 1, \dots, r$

Sia $v \in V \Rightarrow L(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r = \alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_r L(v_r) = \cancel{L(\alpha_1 v_1}$
$= L(\alpha_1 v_1) + \dots + L(\alpha_r v_r) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) \Rightarrow L(v) - L(\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_r v_r) = 0$
$\Rightarrow L(v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r) = 0$
$\Rightarrow v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r \in \ker L \Rightarrow v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_2 v_2 + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k$

$V = \langle\langle v_1, \ldots, v_2, u_1, \ldots, u_k \rangle\rangle$ sono generatori

le prossimo passo è dimostrare che $v_1, \ldots, v_2, u_1, \ldots, u_k$ sono linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ poniamo $\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_2 v_2 + \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_k u_k = 0$ ⊛

$\Rightarrow L(\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_2 v_2 + \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_k u_k) = L(0) = 0$

$\gamma_1 L(v_1) + \gamma_2 L(v_2) + \ldots + \gamma_2 L(v_2) + \delta_1 L(u_1) + \ldots + \delta_k L(u_k) = 0$

$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \ldots + \gamma_2 w_2 + \delta_1 \cdot 0 + \ldots + \delta_k \cdot 0 = 0$ ma $B_{ImL} = \{w_1, \ldots, w_2\} \Rightarrow \gamma_1 = \ldots = \gamma_2 = 0$

$\Rightarrow$ sostituendo in ⊛ ottengo $\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_k u_k = 0$

ma $B_{kerL} = \{u_1, \ldots, u_k\} \Rightarrow \delta_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k$

$\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_2, u_1, \ldots, u_k\}$ è base di $V \Rightarrow \dim V = \dim \ker L + \dim ImL$

c.v.d.

Esempio:

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ con $n \neq p$ può essere un isomorfismo?

se L fosse isomorfismo $\dim \ker L = 0 \Rightarrow \dim ImL = n - 0 = n$, ma allora se $p \neq n$ $ImL \neq \mathbb{R}^p$

non può esserci un isomorfismo tra spazi vettoriali di dimensioni diverse

$\exists$ applicazioni lineari iniettive tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$?

$\exists$ " " suriettive tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$?