GEOMETRIA 07-05-2012

• ANGOLO TRA DUE VETTORI

In uno spazio euclideo (= spazio vettoriale con una forma bilineare simmetrica definita positiva) V dati i vettori $v, w \in V \Rightarrow |v \cdot w| \underset{(*)}{\leq} \|v\| \cdot \|w\|$

(Da questa disuguaglianza possiamo dedurre il coseno dell'angolo e quindi possiamo definire la MISURA DELL'angolo compreso tra due vettori)

Supponiamo $v, w \neq 0 \Rightarrow \|v\|, \|w\| > 0 \Rightarrow$ DIVIDO (*) PER $\|v\| \cdot \|w\| \Rightarrow$

$$\frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\overset{\text{scalare}}{v \cdot w}}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

sappiamo che la funzione <u>coseno</u> è compresa tra -1 e 1,

$\Rightarrow$ detto α l'<u>angolo</u> tra i due vettori v e w:

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

(supposto l'angolo $0 \leq \alpha \leq \pi$) $\Rightarrow$ ABBIAMO LA FORMULA:

$$\Rightarrow \underline{\underline{v \cdot w = \cos(\alpha) \cdot \|v\| \cdot \|w\|}}$$

• DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Dati due vettori $v, w \in V \Rightarrow \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (*)

in un triangolo la misura di un lato è sempre minore della SOMMA delle MISURE degli altri due.

e inoltre: $\big| \|v\| - \|w\| \big| = \|v + w\|$

DIMOSTRAZIONE (*)

$$\|v + w\|^2 = \left(\sqrt{(v+w)(v+w)}\right)^2 = v \cdot v + \underline{w \cdot v + v \cdot w} + w \cdot w$$

dato che la forma bilineare è simmetrica posso scrivere:

$w \cdot v + v \cdot w = 2(v \cdot w)$

$= \|v\|^2 + 2\, w \cdot v + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| =$

$= (\|v\| + \|w\|)^2$

$\Rightarrow$ estraendo le radici si ottiene ⊛ c.v.d.

In modo analogo si dimostra l'altra disuguaglianza.
Il Teorema di Pitagora è un corollario di queste disuguaglianze (con le condizione che i 2 vettori sono perpendicolari).

DEFINIZIONE:
In uno spazio euclideo 2 vettori v e w sono detti PERPENDICOLARI se l'angolo (CONVESSO) tra essi considerato (α) è di $90°$.

quello CONVESSO

In questo caso se $v \perp w \Rightarrow \alpha$ convesso $= 90°$

$\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$

$\Rightarrow v \cdot w = 0 \Rightarrow v$ e w SONO ORTOGONALI (RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE)

In questo SPAZIO, ortogonalità e perpendicolarità coincidono:

$v \perp w \Leftrightarrow v$ e w ortogonali.

TEOREMA DI PITAGORA

Supponiamo $v \perp w \Rightarrow$ (~~nota di proposizione precedente~~)
abbiamo $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2v\cdot w + \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

$$\Downarrow$$

$$2v\cdot w = 0$$

perché $v\cdot w = 0$

DEFINIZIONE:

Chiamiamo VERSORE un vettore di norma unitaria, detto anche vettore normalizzato.
Dato un vettore v ($v \neq 0$) si può sempre normalizzarlo cioè determinare un suo multiplo di norma unitaria, cioè un versore, dividendo v per la norma di $v \Rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ è VERSORE

ESEMPIO

in $\mathbb{R}^3$ euclideo: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, euclideo $\Rightarrow$ trovo il suo normalizzato v'.

norma di v: $\|v\| = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

RICORDA!

Una base B è detta ORTOGONALE se i suoi vettori sono a due a due ORTOGONALI tra loro, e una base B è detta ortonormale se è ortogonale e i vettori hanno norma unitaria, cioè se sono versori.

indicheremo una base ortogonale: $B_\perp$

" " " ortonormale: $B_{\perp N}$

Ricordiamo che una matrice quadrata S, $S \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, si dice <u>ORTOGONALE</u> se $SS^T = S^TS = I$

se $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NN} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow SS^T = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \cdots & s_{N1} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{1N} & s_{2N} & \cdots & s_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ i vettori riga e i vettori colonna sono vettori di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^N$.

Il prodotto riga per colonna è il <u>prodotto scalare</u> ORDINARIO TRA VETTORI!

<u>P.E.</u> 1° riga DI S per 1° colonna di S^T: $s_{11}^2 + s_{12}^2 + \dots + s_{1N}^2 = 1$. POICHÉ COINCIDE CON IL PRODOTTO SCALARE DELLA PRIMA RIGA PER SE STESSA PERCHÉ (*)

$\Rightarrow$ il 1° vettore RIGA della matrice S è normalizzato: ciò vale per ogni prodotto della i-esima riga di S PER LA i-ESIMA COLONNA DI S^T, IL CUI RISULTATO È 1!

<u>INVECE</u> un prodotto di i-esima riga DI S per j-esima colonna di S^T è 0.

$\Rightarrow$ i vettori riga sono ortogonali oltre che normalizzati.

a 2 a 2.

(*) dato che la i-esima riga e la i-esima colonna sono uguali è come fare un prodotto scalare del vettore per se stesso.

considerando ancora le matrici $S \mid S^T = S^{-1}$ $\Rightarrow$ SE $A = [Q]_{B\ iniziale}$

$\Rightarrow$ SE $D = S^T A S \Rightarrow D = S^{-1} A S$ (DIAGONALE D)

$\Rightarrow$ trovando la matrice PER una forma quadratica (Q) con la diagonalizzazione, cosa cambia? = LA BASE NUOVA, I CUI VETTORI SONO I VETTORI COLONNA DI S, È ORTONORMALE!

$Q(x,y) = xy$ $\quad Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ APPLICAZIONE.

se $xy = 1$ $\Rightarrow$ in $\mathbb{R}^2$ cerco i vettori le cui coordinate soddisfano la l'equazione data.

Q è anche il luogo geometrico dei vettori le cui coordinate soddisfano l'equazione

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ applicazione lineare

$(x,y) \to x+y$

se $x+y = k$ $\Rightarrow$ è una retta geometricamente parlando: il luogo geometrico è una retta

(dove si trovano i vettori che soddisfano l'equazione).

$\Rightarrow$ le applicazioni date DEFINISCONO un luogo geometrico.

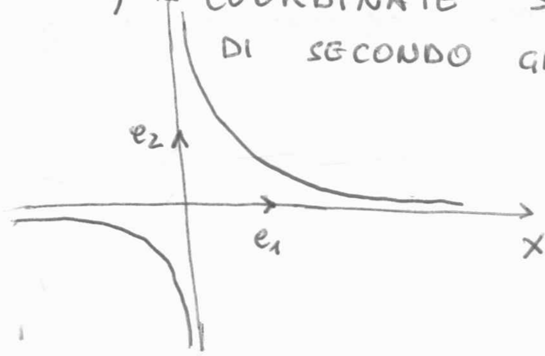
In generale in $\mathbb{R}^N$: QUADRICA È IL LUOGO DEI PUNTI LE CUI COORDINATE SODDISFANO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO IN N VARIABILI

in $\mathbb{R}^2$ = CONICA

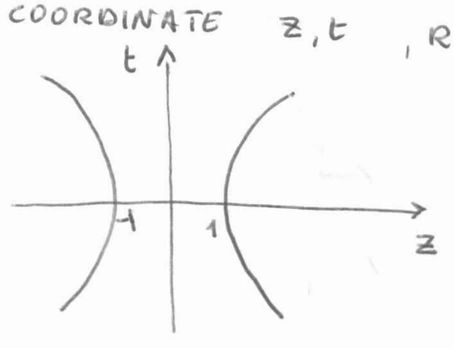
in $\mathbb{R}^3$ = SUPERFICI QUADRICHE

p.e. iperbole equilatera

$xy = k$

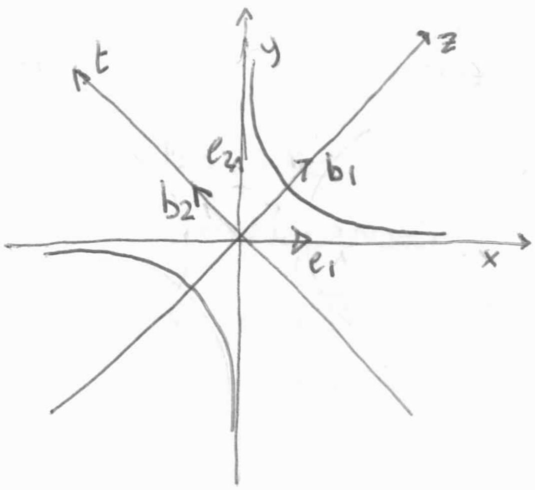


$z^2 - t^2 = 1$ $\Rightarrow$ $z^2 - t^2$ è la forma canonica della forma quadratica $Q(x,y) = xy$, NELLE COORDINATE z,t, RIFERITE AD UNA NUOVA BASE



è ancora un'iperbole!

si passa alla forma canonica cambiando la BASE.
nel caso dell'iperbole il sistema di riferimento è ruotato:



RICORDO CHE

$A \sim_c B \iff \exists S \mid B = S^T A S$ $\Rightarrow$ Q È LA FORMA QUADRAT.

$Q(x,y) = x \cdot y \Rightarrow$

$$A = [Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = [Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

S è la matrice del cambiamento di base.

$B = \{b_1, b_2\}$

$\Rightarrow$ la base a cui arrivo è ORTONORMALE, ciò non accade necessariamente con gli altri metodi che non USANO la diagonalizzazione. PER DETERMINARE LA MATRICE D CHE FORNISCE LA FORMA CANONICA DI Q

In uno spazio euclideo V, dato un sotto spazio W con $\dim W = k$ e $\dim V = n$ $\Rightarrow$ $\exists$ sempre il suo COMPLEMENTO ORTOGONALE cioè: il sottospazio (unico) $W^\perp$ tale che $W^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0 \ \forall w \in W\}$

$W^\perp$ è tale che $\dim W^\perp = n - k$ e $W \oplus W^\perp = V$

esistono tanti sottospazi U tali che $W \oplus U = V$, ma solo uno è complemento ortogonale di W

per trovarlo basta determinare l'insieme dei vettori ortogonali a una base di W.

In uno spazio euclideo possiamo trovare la proiezione ortogonale: dato $v \in V \Rightarrow$ chiamo proiezione ortogonale di v su un sottospazio W il vettore di W: g ($g \in W$) tale che $v - g \in W^\perp$ cioè $v - g = h$ con $h \in W^\perp$.