MATRICI SIMILI

5/03/2012

(1)

DEFINIZIONE: Date due matrici $A, B \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \sim_s B$
$\Leftrightarrow \exists\ S \in M_{N\times N}$ invertibile $/ B = S^{-1}AS$; è una relazione di equivalenza.
$\Rightarrow$ possiamo dare la sua classe di equivalenza (= similitudine) di una matrice A ([A])
$\exists$ una corrispondenza biunivoca tra gli operatori $T: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e le classi di similitudine delle matrici quadrate di ordine N.

PROPRIETÀ:

(1) Il determinante di una matrice è invariante per similitudine.
se $A \sim_s B \Rightarrow \exists\ S$ invertibile $/ B = S^{-1}AS \Rightarrow |B| = |S^{-1}AS|$
$= |S^{-1}||A||S|$ per il teorema di Binet
$|S^{-1}||A||S| = |S|^{-1}|A||S| = |S|^{-1}|S||A| = |A| \Rightarrow |B| = |A|$

(2) Il rango di una matrice è invariante per similitudine.
($rg = \dim Im$) INFATTI IL RANGO DELLA MATRICE È LA DIMENSIONE DELL'IMMAGINE DI UN OPERATORE ADESSA ASSOCIATO IN UNA BASE FISSATA. UNA MATRICE (*)

LEMMA: (lemma algebrico) Siano A e $S \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, S invertibile, $\Rightarrow rg\, A = rg(A\cdot S) = rg(S\cdot A)$

DIMOSTRAZIONE: Considero la matrice $(A\cdot S)$, dette $C_S^1\ C_S^2 \ldots C_S^N$ le colonne di S $\Rightarrow$ le colonne di $A\cdot S$ sono: $AC_S^1; AC_S^2 \ldots AC_S^N$

ex: $A: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$|S| \neq 0 \Rightarrow S$ è invertibile

$\Rightarrow A\cdot S = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}7$

$AC_S^1, AC_S^2, \ldots, AC_S^N$ sono combinazioni lineari delle colonne di A $\Rightarrow rg(AS) \leq rg(A)$ perché il numero di colonne l. indipendenti non cambia.

(*) SIMILE È ASSOCIATA ALLO STESSO OPERATORE IN UNA BASE DIVERSA PERTANTO LA DIMENSIONE DELL'IMMAGINE NON CAMBIA, DIPENDENDO SOLO DALL'OPERATORE E NON DALLA BASE.

cvd.

Ora considero $B = A\cdot S$ e $T = S^{-1}$ invertibile

$\Rightarrow rg(BT) \leq rg B \Rightarrow rg(A\cdot S\cdot S^{-1}) \leq rg(A\cdot S)$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A\cdot S)$

PROPOSIZIONE

Il rango è invariante per similitudine:

DIMOSTRAZIONE

$A \sim_S B \Rightarrow B = S^{-1}AS \Rightarrow rg(B) = rg(S^{-1}AS)$

per il lemma precedente $rg(S^{-1}AS) = rg(S^{-1}A) = rg(A)$

$\Rightarrow rg(B) = rg(A)$

$\Rightarrow$ Il rango di matrici simili non cambia.

POLINOMIO CARATTERISTICO

Data una matrice quadrata $A \in M_{N\times N}$ e un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ possiamo formare una matrice nuova di ordine N:

$A - \lambda I$ con $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N\times N}$

EX: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

Il determinante di $A - \lambda I$ è un polinomio nella variabile λ di grado pari all'ordine della matrice

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

detto polinomio caratteristico di A.

($A - \lambda I$ è formata togliendo λ dalla diagonale di A)

TERMINE DI GRADO MAX

se $\lambda I - A \Rightarrow$ il coefficiente di λ^2 è $1 \Rightarrow$ polinomio MONICO

(la scomposizione è più semplice)

le radici di tale polinomio sono dette radici caratteristiche nell'esempio: $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} \to \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \ \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ $\Rightarrow$

②

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = \left(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)$$

Il grado massimo del fattore della scomposizione che corrisponde a una determinata radice è detto: MOLTEPLICITA' ALGEBRICA della radice stessa.

nell'esempio: abbiamo 2 radici caratteristiche SEMPLICI perchè il grado è ①.

EX: $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^3 (\lambda-2)^2 \underbrace{(\lambda^2+1)}_{\text{in } \mathbb{R} \text{ non è scomponibile}}$

$\Rightarrow$ ho due radici reali caratteristiche: $\lambda_1 = -1$ $\downarrow$ con molteplicità 3 $(\mu(-1) = 3)$

e $\lambda_2 = +2 \to$ con molteplicità 2 $(\mu(+2) = 2)$

in $\mathbb{C}$: $\lambda_3 = i$ con molteplicità 1 $\quad (\mu(i) = 1)$
$\lambda_4 = -i$ con molteplicità -1 $\quad (\mu(-i) = -1)$

PROPOSIZIONE

Il polinomio caratteristico di A è invariante per similitudine.

DIMOSTRAZIONE

$A \sim_S B \Rightarrow \exists S$ invertibile $| B = S^{-1}AS \Rightarrow$ il polinomio caratteristico di B è $= |B - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda I| =$
$= |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda S| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda I S| =$
$= |S^{-1}(A - \lambda I)S| \xrightarrow{\text{per il teorema di Binet}} = |S|^{-1}|A - \lambda I||S| = |A - \lambda I|$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI UNA MATRICE A, HA COME COEFFICIENTI:

$$p_A(\lambda) = \underbrace{(-1)^N \lambda^N}_{\text{termine di grado max.}} + C_1 \lambda^{N-1} + C_2 \lambda^{N-2} + \dots + C_N$$

dove C_K, $K: 1 \dots N$ è $C_K = (-1)^{N-K} \cdot \sum$ dei minori principali della matrice A.

(minori principali: determinanti delle sotto matrici di A che hanno come diagonale principale delle parti della diagonale principale di A)

Ex:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow C_N = \det A$

$\Rightarrow C_1$: somma delle entrate della diagonale* di A, è la traccia di A $\Rightarrow$ ABBIAMO DIMOSTRATO LA PROPOSIZIONE:

PROPOSIZIONE: $\mathrm{Tr}\, A$ è invariante per similitudine.

* principale