ESERCIZIO: 2/11/2011 (1)

$$\mathcal{C}^0_{[a,b]} = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$$

Dimostrare che è uno spazio vettoriale CON LE OPERAZIONI COSì DEFINITE: operazioni di SOMMA, MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE.

SOMMA:

• Date $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f_1 + f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si definisce $\alpha f_1 \; [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (\alpha f_1)(x) = \alpha(f_1(x))$$

SOMMA:

$$\oplus \quad \mathcal{C}^0_{[a,b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathcal{C}^0_{[a,b]}$$

$$(f_1, f_2) \longmapsto f_1 + f_2$$

La somma di funzioni continue è CONTINUA.

LA SOMMA È UN'OPERAZIONE BINARIA INTERNA.

PRODOTTO PER UNO SCALARE:

$$\cdot\alpha : \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathcal{C}^0_{[a,b]}$$

$$(\alpha, f_1) \longmapsto \alpha f_1$$

È ANCORA UNA FUNZIONE CONTINUA.

DEVO VERIFICARE CHE PROPRIETÀ VALGONO PER LE DUE OPERAZIONI:

Per la somma:

(1) ASSOCIATIVA: $\underbrace{(f_1+f_2)+f_3}_{g_1} = \underbrace{f_1+(f_2+f_3)}_{g_2} \; \forall f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^0_{[a,b]}$

continue perché somma di funzioni continue.

DEVO DIMOSTRARE: CHE LE DUE FUNZIONI SONO UGUALI, QUINDI DEVO DIMOSTRARE CHE

$\forall x \in [a,b]$, $g_1(x) = g_2(x)$:

$$((f_1+f_2)+f_3)(x) = (f_1+(f_2+f_3))(x)$$

$$(f_1+f_2)(x) + f_3(x) = f_1(x) + (f_2+f_3)(x) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow (f_1(x) + f_2(x)) + f_3(x) \stackrel{?}{=} f_1(x) + (f_2(x) + f_3(x))$$

La dimostrazione di tale uguaglianza si riduce allo studio dell'associatività della somma in $\mathbb{R}$.

Dato che è stato dimostrato che LA SOMMA in $\mathbb{R}$ gode DELLA PROPRIETÀ associativa, $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~.

l'uguaglianza è vera $\forall x : g_1(x) = g_2(x) \Rightarrow g_1 \equiv g_2$

Lo stesso procedimento si ripete per: (2)

(2) La PROP. COMMUTATIVA

(3) l'elemento NEUTRO:

$\exists\, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $f+g = g+f = f \;\; \forall f \in C^0_{[a,b]}$

DUE FUNZIONI SONO UGUALI SE COINCIDONO LE IMMAGINI DI OGNI ELEMENTO, quindi: VOGLIAMO CHE:

$\forall x \in [a,b] : (f+g)(x) = f(x)$

$f(x)+g(x) = f(x) \Rightarrow g(x) = 0 \;\; \forall x \in [a,b] \;\; \Rightarrow \;\; g \equiv 0$

(4) $\exists$ l'opposto.

Per l'operazione di moltiplicazione per uno scalare α:

(1) ASSOCIATIVA:

$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$

$[\alpha(\beta f)](x) = [(\alpha\beta)f](x) \;\; \forall x \in [a,b]$

$\alpha(\beta f(x)) \overset{?}{=} (\alpha\beta) f(x)$ VERO PER L'ASSOCIATIVITÀ DEL PRODOTTO TRA NUMERI REALI.

Dato che è vera per ogni x, le 2 funzioni sono UGUALI $\Rightarrow$ vale l'associativa.

(2) $\exists$ ELEM. NEUTRO:

stesso procedimento di prima: lavoro con i numeri REALI.

(3) DISTRIBUTIVA:

$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } f,g \in C^0_{[a,b]}$

$[\alpha(f+g)](x) = (\alpha f + \alpha g)(x) \;\; \forall x \in [a,b]$

$\alpha[(f+g)(x)] \overset{?}{=} (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$

$\alpha[f(x) + g(x)] \overset{?}{=} \alpha(f(x)) + \alpha(g(x))$

VERA PER LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA IN $\mathbb{R}$. POICHÉ α, $f(x)$ e $g(x)$ sono di fatto NUMERI REALI.

Dato che in $C^0_{[a,b]}$ valgono le suddette operazioni si ha che l'insieme $C^0_{[a,b]}$ è uno SPAZIO VETTORIALE.

$\Sigma_0: x_1 + x_2 - x_3 = 0$ POICHÉ IL SISTEMA HA TRE VARIABILI, LE SUE SOLUZIONI SONO DATE DA TERNE DI NUMERI REALI, CIOÈ DA ELEMENTI DI $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$
LO SPAZIO AMBIENTE IN CUI LAVORIAMO E IN CUI COLLOCHIAMO GEOMETRICAMENTE $Sol\,\Sigma_0$ È $\mathbb{R}^3$

Cerco le soluzioni fondamentali che generano lo spazio delle soluzioni $Sol\,\Sigma_0$:

① ESISTE SICURAMENTE LA SOLUZIONE NULLA.

② LA MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA È: $(1\ 1\ -1) \Rightarrow$ rango $\Sigma_0 = 1 \Rightarrow$ 1 PIVOT $\Rightarrow$ 1 VARIABILE LEGATA (dipendente), quella di cui il PIVOT È COEFFICIENTE $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ # VARIABILI − rango Σ_0 (cioè # di variabili − # variab. legate) = # VARIABILI LIBERE (cioè i parametri).

Per le Σ_0 dell'esempio $\Rightarrow$ 3 VARIABILI e x_1 è la variabile legata $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x_2 e x_3 sono le variabili libere.

QUINDI:

Σ_0: $x_1 = -x_2 + x_3 \Rightarrow$

x_1	x_2	x_3
1	0	1
−1	1	0
−a+b	a	b

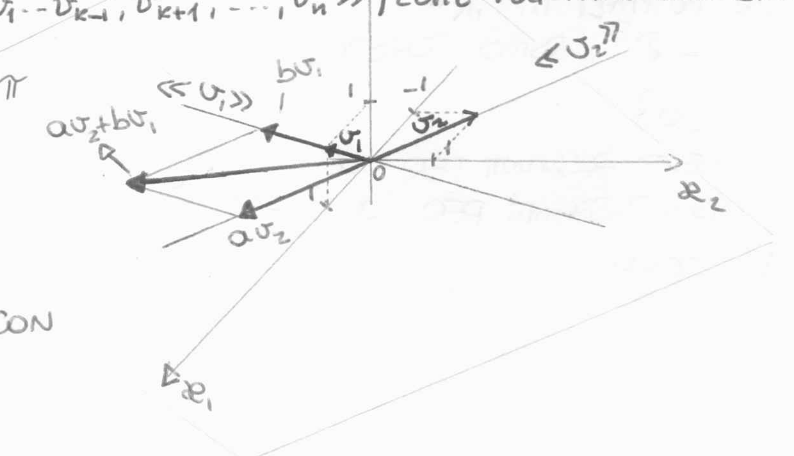
$v_1 = (1,0,1) \rightarrow$ SOL. FONDAMENT.

$v_2 = (-1,1,0) \rightarrow$ SOL. FONDAMENT.

NON SCELGO (0,0) perché so che x_1 sarebbe = 0. Lo so già e non mi interessa. Voglio trovare soluzioni diverse DA (0,0,0)

DANDO I VALORI 0 E 1 ALTERNATIVAMENTE ALLE VARIABILI LIBERE, SICURAMENTE $v_2 \notin \langle\langle v_1 \rangle\rangle$ (E IN GENERALE, $v_k \notin \langle\langle v_1 .. v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle\rangle$) COME VOGLIAMO CHE SIA.

IL # DI VARIABILI LIBERE DÀ IL # DI SOLUZIONI FONDAMENTALI.



$v_1 = (1,0,1)$ SOLUZ. FONDAMENTALE ①

$v_2 = (-1,1,0)$ SOLUZ. FONDAMENTALE ②

$v = (-a+b, a, b)$ SOLUZ. GENERALE CON $a, b \in \mathbb{R}$.

$$v = (-a+b, a, b) = a(-1,1,0) + b(1,0,1) = av_2 + bv_1$$

v = somma di multipli delle soluz. FONDAMENTALI.

$Sol\,\Sigma_0 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$ ed È UN PIANO PASSANTE PER L'ORIGINE

$$Sol\,\Sigma_0 = \{a(-1,1,0) + b(1,0,1), \forall a, b \in \mathbb{R}\}$$

Si noti che dato Σ_0 SISTEMA LINEARE OMOGENEO $\Rightarrow$ il vettore nullo dello spazio vettoriale V di cui $Sol\,\Sigma_0$ È sottoinsieme è sempre soluzione cioè $0 \in Sol\,\Sigma_0$

- se $v \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow av \in Sol\,\Sigma_0 \ \forall a \in \mathbb{R}$
- se $v_1, v_2 \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in Sol\,\Sigma_0$

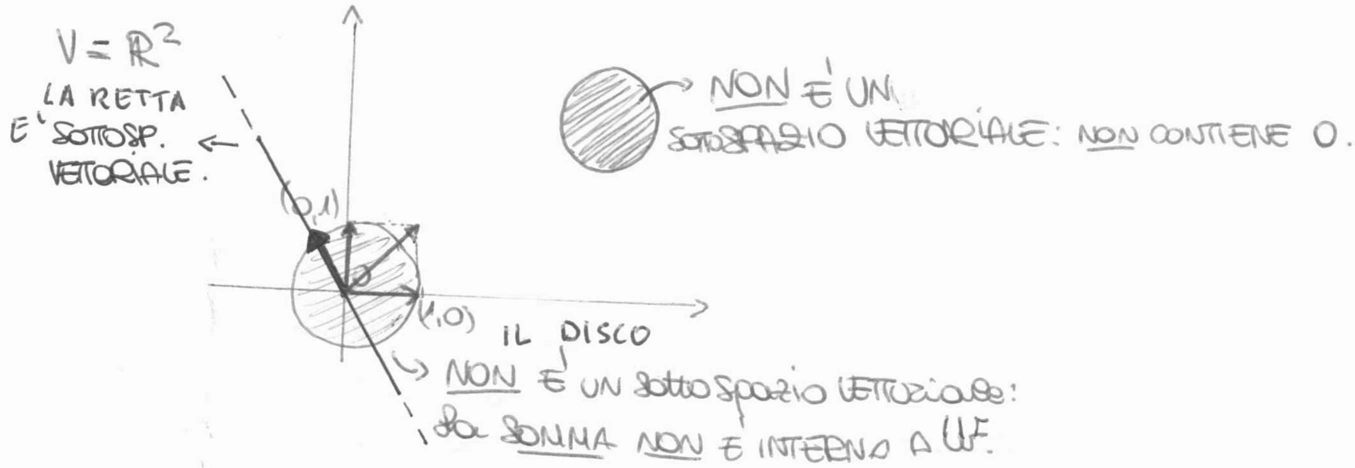
$\Rightarrow Sol\,\Sigma_0$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V

infatti abbiamo la seguente definizione:

UN SOTTOINSIEME W DI UNO SPAZIO VETTORIALE V È DETTO **SOTTOSPAZIO VETTORIALE** DI V SE SONO VERIFICATE:

1. IL VETTORE NULLO DI V, 0, appartiene a W.
2. $\forall w \in W$, $\alpha w \in W$ $\forall \alpha \in R$
3. $\forall w_1, w_2 \in W$ si ha $w_1 + w_2 \in W$.

2 e 3 ci dicono che W è CHIUSO RISPETTO ALLE OPERAZIONI DI V.



- SOTTOSPAZI BANALI: esistono sempre 2 sottospazi "Banali": V e $\{0\}$ ← SPAZIO VETTORIALE
- SOTTOSPAZI NON "BANALI": le Rette passanti per l'origine SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}^2$

Se $V = \mathbb{R}^3$: sono sottospazi vettoriali:

- V e $\{0\}$
- le RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE
- i PIANI PASSANTI PER L'ORIGINE.
- V STESSO.