(1)

RELAZIONE DI SIMILITUDINE TRA MATRICI è la seguente:

$$A \sim_S B \iff \exists S \text{ invertibile} \mid B = S^{-1}AS$$

RELAZIONE DI CONGRUENZA TRA MATRICI è la seguente:

$$A \sim_C B \iff \exists S \text{ invertibile} \mid B = S^{T}AS$$

Trovando una matrice S invertibile, la cui inversa è uguale alla trasposta, allora posso utilizzare la Diagonalizzazione anche per la CONGRUENZA, ovvero anche per la RIDUZIONE A FORMA CANONICA DELLE forme quadratiche.

Ciò può aiutare a trovare l'espressione canonica della forma quadratica.

Cerco quindi una matrice D (diagonale) congruente ad A in una determinata base; cioè cerco D tale che $D = S^TAS$.

Se S è tale che $S^T = S^{-1} \Rightarrow D = S^{-1}AS$; cioè D è simile ad A e quindi A è <u>DIAGONALIZZABILE</u>.

Si uniscono quindi due relazioni DI EQUIVALENZA che a priori sono indipendenti!!

Una matrice S <u>quadrata</u> tale che $SS^T = I$ è detta <u>ORTOGONALE</u>.

$(S^TS = SS^T = I \Rightarrow S^T = S^{-1})$.

CARATTERISTICHE DI S:

- Deve essere quadrata
- " " INVERTIBILE ($\det S \neq 0$).
- Il determinante di S ($\det S$) deve essere $|SS^T| = 1 \Rightarrow$ per Binet $= |S||S^T| = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow |S|^2 = 1 \Rightarrow |S| = \pm 1$. (siamo in $\mathbb{R}$).

NON POSSIAMO PERÒ BASARCI SOLO SUL DETERMINANTE PER STABILIRE SE S È ORTOGONALE

Se $|S| = \pm 1 \not\Rightarrow S$ ortogonale.

Controesempio: $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |S| = 1 \qquad S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad SS^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq I$

<u>NON È ORTOGONALE!</u>

ESERCIZIO: Dimostrare che gli unici autovalori possibili per una matrice ortogonale sono $\lambda = \pm 1$. (in $\mathbb{R}$).

POSSIAMO USARE LA DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI SIMMETRICHE PER DETERMINARE UNA FORMA CANONICA DI FORME QUADRATICHE.

② I ESEMPIO:

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$A = [Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 2(-2(1-\lambda)) + (4-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] =$$

$$= -4 + 4\lambda + (4-\lambda)(\cancel{1} - 2\lambda + \lambda^2 \cancel{-1}) = -4 + 4\lambda - 8\lambda + 4\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda - 4$$

non si scompone con RUFFINI.

DEFINIZIONE:

Si dice SPAZIO EUCLIDEO uno spazio vettoriale reale con una forma bilineare simmetrica DEFINITA POSITIVA.

*esempi: $\mathbb{R}^3$ con la forma bilineare $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$

è simmetrica? Si $\Rightarrow F$ è simmetrica.

$$[F]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ F è definita positiva perchè le ENTRATE della diagonale sono tutte positive.

$\Rightarrow |[F]_e| \neq 0 \Rightarrow$ ha rango massimo.

Chiamiamo PRODOTTO SCALARE una forma bilineare simmetrica reale definita positiva.

$\boxed{\Rightarrow \text{Uno spazio euclideo è uno spazio su cui è definito un prodotto scalare.}}$

*Il prodotto scalare dell'esempio è il PRODOTTO SCALARE USUALE.

• Altro esempio di prodotto scalare:

Sia $V = \mathcal{C}^0_{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ f \text{ continue}\} \Rightarrow$ considero $F: \mathcal{C}^0_{[a,b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

[INTEGRALE DI RIEMANN]

Si dimostra che F è forma bilineare simmetrica.
(Da dimostrare per esercizio).

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) \longmapsto \int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) g\,dx = \alpha_1 F(f_1,g) + \alpha_2 F(f_2,g)$$

F è definita positiva: $F(g,g) > 0 \ \forall g \neq 0 \Rightarrow F(g,g) = \int_a^b g^2(x)\,dx > 0 \ \forall x \in [a,b]$.

DEFINIZIONE:

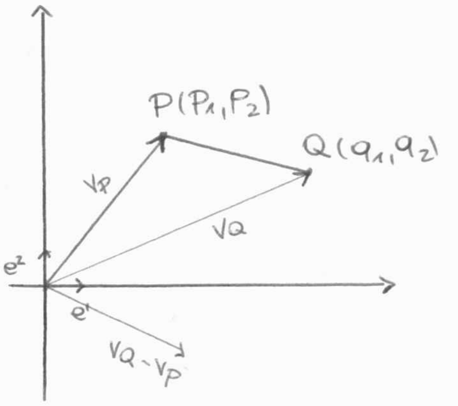
NORMA (o MODULO) di un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ EUCLIDEO è la quantità così definita:

$\|V\| = |V| = \sqrt{F(v,v)}$ con F prodotto scalare.

Se Q è la forma quadratica associata ad $F \Rightarrow \|V\| = |V| = \sqrt{Q(v)}$.

Nell'esempio del PRODOTTO SCALARE USUALE: $\|V\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

③ La DISTANZA TRA DUE PUNTI DI R^n



$$d(P,Q) = \| \bar{v}_P - \bar{v}_Q \| =$$
$$= \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + \ldots + (q_n-p_n)^2}$$

TEOREMA DI CAUCHY - SCHWARTZ:

In uno spazio EUCLIDEO R^n $\forall v, w \in R^n$ $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$

DIMOSTRAZIONE:

① Se v e w sono linearmente dipendenti ad esempio $w = \alpha v$ $\alpha \in R \Rightarrow$ VALE L'UGUAGLIANZA

$$|v \cdot w| = |v \cdot \alpha v| = |\alpha| \, v \cdot v = \alpha \|v\|^2$$

$$\|v\|\|\alpha\| = \|v\| \cdot \|\alpha \cdot v\| = \|v\|\sqrt{\alpha v \cdot \alpha v} = \sqrt{\alpha^2 v \cdot v}\,\|v\| = \|v\| \alpha \sqrt{v \cdot v} = \|v\| \cdot |\alpha| \, \|v\| = |\alpha| \|v\|^2$$

$\Rightarrow$ in questo caso $|v \cdot w| = \|v\| \cdot \|w\|$

② Se v e w sono linearmente INDIPENDENTI $\Rightarrow$ considero $V = \langle\langle v, w \rangle\rangle$ e considero la restrizione a U del prodotto scalare "$\cdot$".

$$\Rightarrow \left[\text{"}\cdot\text{"}|_V \right]_{\{v,w\}} = \begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ v \cdot w & w \cdot w \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ per il metodo di Jacobi, ESSENDO LA FORMA BILINEARE DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ v \cdot w & w \cdot w \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - (v \cdot w)^2 > 0 \Rightarrow (\|v\| \|w\|)^2 > (v, w)^2$$

$\Rightarrow \|v\| \|w\| > |v \cdot w|$ c.v.d.