2/4/2012

Sia V ~~uno~~ uno spazio vettoriale $\mathcal{U} < V$ $F: V \times V \to \mathbb{R}$ priva di elementi isotropi. $\Rightarrow \mathcal{U}^{\perp} = \{ v \in V \,/\, F((v,u)) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \}$ è sottospazio vettoriale di dimensione uguale alla $\dim V - \dim \mathcal{U}$.

La dimostrazione verte sul sistema lineare ottenuto così determinato:
supponiamo $\dim \mathcal{U} = K$ e $B_{\mathcal{U}} = \{u_1, \dots, u_K\} \Rightarrow$ cerco i $v \in V \,/\!/ \begin{cases} F((v,u_1)) = 0 \\ F((v,u_2)) = 0 \\ \vdots \\ F((v,u_3)) = 0 \end{cases}$

qual è il rango del sistema? Il rango di tale sistema di K equazioni in $n = \dim V$ incognite è K: infatti consideriamo

$\alpha_1 F((v,u_1)) + \alpha_2 F((v,u_2)) + \dots + \alpha_K F((v,u_K)) = 0 \Rightarrow$

poiché $v \in V$ è generico $\Rightarrow$ posso prendere $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_K u_K$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ applico la bilinearità sulla seconda componente:)

$F((v, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_K u_K)) = 0$

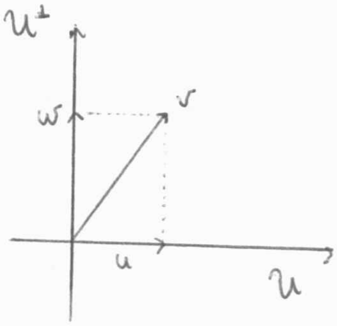
$\Rightarrow$ (sostituisco:) $F((\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_K u_K, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_K u_K)) = 0$

$\Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_K u_K$ è isotropo per F ma F non ha vettori isotropi per ipotesi $\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_K u_K = 0 \Rightarrow$ essendo $\{u_1, \dots, u_K\}$ ~~[illegible]~~ base di $\mathcal{U}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_K = 0 \Rightarrow$ rg del sistema è K, cvd.

$\Rightarrow V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp} \Rightarrow v = u + w$ u proiezione ortogonale di v su $\mathcal{U}$ e w proiezione ortogonale di v su $\mathcal{U}^{\perp}$, $\forall v \in V$. AD ESEMPIO:

$V = \mathbb{R}^2$



Proposizione: se $F: V \times V \to \mathbb{R}$ è degenere $\Rightarrow \exists$ vettori F-isotropi

(se F è degenere una qualsiasi matrice associata ad essa non ha rango massimo, continuando a mantenersi per congruenza)

In una base qualunque $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ la matrice $[F]_{B_V}$ non ha rango massimo

$\Rightarrow$ posta $[F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & \dots & F((v_1,v_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F((v_n,v_1)) & F((v_n,v_2)) & \dots & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix}_{n \times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ SUPPONIAMO CHE LA i-ESIMA RIGA SIA COMBINAZIONE LINEARI DI ALTRE $\Rightarrow$ CONSIDERO $F((v_i, v_j))$ TERMINE j-ESIMO DI TALE RIGA, $\forall j = 1, \dots, n$; AVREMO:

$$F((v_i, v_j)) = \alpha_{i_1} F((v_{i_1}, v_j)) + \alpha_{i_2} F((v_{i_2}, v_j)) + \dots + \alpha_{i_m} F((v_{i_m}, v_j))$$

$$\Rightarrow -F((v_i, v_j)) + \alpha_{i_1} F((v_{i_1}, v_j)) + \alpha_{i_2} F((v_{i_2}, v_j)) + \dots + \alpha_{i_m} F((v_{i_m}, v_j)) = 0$$

per la bilinearità: $F((\alpha_{i_1} v_{i_1} + \alpha_{i_2} v_{i_2} + \dots + \alpha_{i_m} v_{i_m} - v_i, v_j)) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m} v_{i_m} - v_i)}_{w}$ e v_j sono F-coniugati (quindi ortogonali) $\forall v_j \in B_V \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m} v_{i_m} - v_i$ è F-ortogonale ad ogni $v \in V$, compreso w stesso

$\Rightarrow w$ è isotropo!

c.v.d

Esercizio: dimostrare che una forma bilineare non degenere può avere vettori isotropi. (dare un esempio)

OSSERVAZIONE:

Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica e B_V base su V

$\Rightarrow$ sia $A = [F]_{B_V}$, A è simmetrica, cambiamo base $\tilde{B}_V$

$\Rightarrow [F]_{\tilde{B}_V}$ è congruente ad A

Se la base $\tilde{B}_V$ è F-ortogonale $\Rightarrow [F]_{\tilde{B}_V}$ è diagonale:

$\Rightarrow$ possiamo dedurne che ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.

Se la base è F-ortonormale $\Rightarrow$ la matrice associata a F in tale base è $[F]_{B_{\perp n}} = I$.

Definizione: Si dice FORMA QUADRATICA una applicazione $Q: V \to K$ con V spazio vettoriale sul campo K /

1) $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v)$ $\forall v \in V$ ed $\alpha \in K$

2) $F((v, w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ sia una forma bilineare simmetrica

---

Esempio: $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto x^2 + 2y^2$

$\Rightarrow$ 1) $\alpha v = (\alpha x, \alpha y) \Rightarrow Q(\alpha v) = Q(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 x^2 + 2\alpha^2 y^2 = \alpha^2 (x^2 + 2y^2) = \alpha^2 Q(v)$

2) posto $v = (x, y)$ e $w = (\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow F((v, w)) = Q((x+\tilde{x}, y+\tilde{y})) - Q((x, y)) - Q((\tilde{x}, \tilde{y})) =$

$= (x+\tilde{x})^2 + 2(y+\tilde{y})^2 - x^2 - 2y^2 - \tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 =$

$= \cancel{x^2} + \cancel{\tilde{x}^2} + 2x\tilde{x} + \cancel{2y^2} + \cancel{2\tilde{y}^2} + 4y\tilde{y} - \cancel{x^2} - \cancel{2y^2} - \cancel{\tilde{x}^2} - \cancel{2\tilde{y}^2} =$

$= 2x\tilde{x} + 4y\tilde{y}$ forma bilineare (data mediante polinomio omogeneo di 2° grado) simmetrica:

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{f. bilin. simmetrica}$$
$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right) \longmapsto 2x\tilde{x} + 4y\tilde{y}$$

$\Rightarrow Q$ è una forma quadratica ■

ORA

Cerco una forma bilineare $F_Q: V \times V \to K$ simmetrica /
$F_Q((v,v)) = Q(v) \quad \forall v \in V$

Data $Q: V \to K$ ho definito $F((v,w)) := -Q(v) - Q(w) + Q(v+w)$

$\Rightarrow$ in un campo con caratteristica $\neq 2$, posso porre

$$F_Q((v,w)) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$: È FORMA BILINEARE SIMMETRICA E

$\forall v \in V$:

vale $F_Q((v,v)) = \dfrac{Q(2v) - Q(v) - Q(v)}{2} = \dfrac{4Q(v) - 2Q(v)}{2} = Q(v)$.

Tale forma bilineare con la proprietà richiesta è unica!

Infatti supponiamo che $\exists \tilde{F}: V \times V \to K$ bilineare simmetrica / $\tilde{F}((v,v)) = Q(v) \ \forall v \in V$

$Q(v+w) = \tilde{F}((v+w, v+w)) = \tilde{F}((v,v)) + \tilde{F}((v,w)) + \tilde{F}((w,v)) + \tilde{F}((w,w)) =$

$= Q(v) + 2\tilde{F}((v,w)) + Q(w) \Rightarrow \tilde{F}((v,w)) = \dfrac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$ (se la caratteristica di K è $\neq 2$)

$= F_Q((v,w))$. c.v.d

F_Q è detta FORMA BILINEARE POLARE di Q.

ORA CONSIDERIAMO UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA F:

Sia ora $F: V \times V \to K$, simmetrica, con $ch(K) \neq 2$ e definiamo $Q: V \to K$
$v \longmapsto F((v,v)) = Q(v)$

$\Rightarrow Q$ è forma quadratica: infatti

1) $Q(\alpha v) = F((\alpha v, \alpha v)) = \alpha F((v, \alpha v)) = \alpha^2 F((v,v)) = \alpha^2 Q(v)$

2) $Q(v+w) - Q(v) - Q(w) = F((v+w, v+w)) - F((v,v)) - F((w,w)) =$

$= \cancel{F((v,v))} + \cancel{F((w,w))} + 2F((v,w)) - \cancel{F((v,v))} - \cancel{F((w,w))} = 2F((v,w))$ forma bilineare simmetrica

inoltre $F_Q = F$ quindi esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle forme quadratiche e l'insieme delle forme bilineari simmetriche:

$$\phi: \{\text{forme quadratiche}\} \longrightarrow \{\text{forme bilineari simmetriche}\}$$
$$Q \longmapsto F_Q$$

se $ch(K) \neq 2$.

Fissata una base B di $V \Rightarrow$ possiamo associare una matrice ad una forma quadratica $Q: V \to K$ con $ch(K) \neq 2$, $[Q]_B = [F_Q]_B$

$Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ presa $\mathcal{E}$ come base di $\mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto x^2 + 2y^2 + 4xy$

$\to$ metà del coefficiente del termine misto

$$\Rightarrow [Q]_{\mathcal{E}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = [F_Q]_{\mathcal{E}}$$

$\downarrow$ coefficienti dei termini quadrati