30-04-14

Sia $T: V \rightarrow V$ operatore isometrico nello spazio euclideo V: cioè un operatore biettivo tale che $\forall u, v \in V$ $T(u) \cdot v = u \cdot T^{-1}(v)$

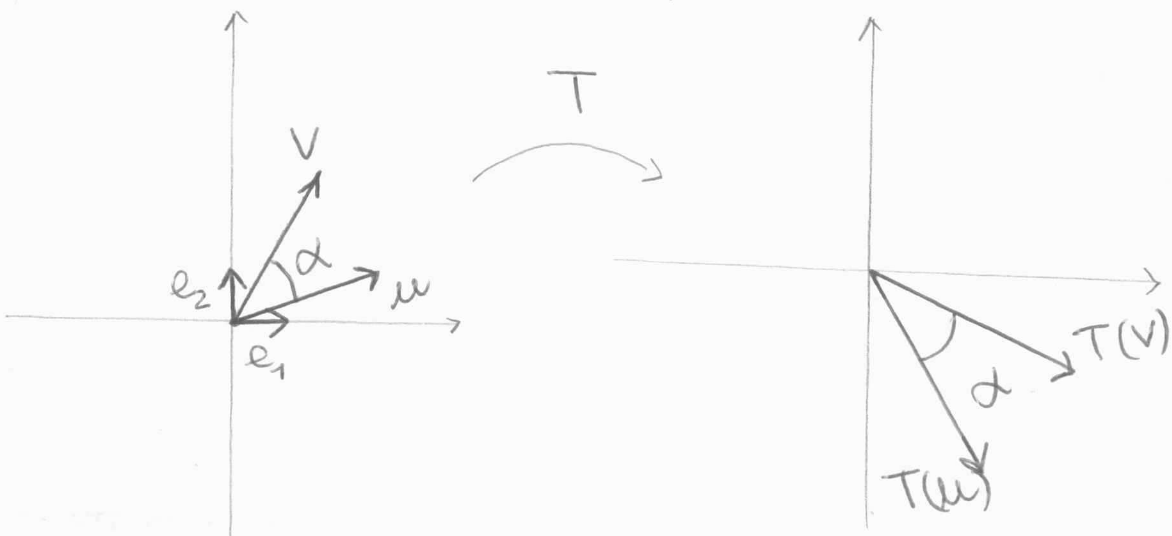
PROPRIETÀ:

1) Dimostriamo che $\boxed{T(u) \cdot T(v) = u \cdot v}$: $\forall u, v \in V$

$$T(u) \cdot T(v) = u \cdot T^{-1}(T(v)) = u \cdot v$$

c.v.d

2) Inoltre $\cos \widehat{u, v} = \cos \widehat{T(u), T(v)}$



DIMOSTRAZIONE:

$$\cos \widehat{T(u), T(v)} = \frac{T(u) \cdot T(v)}{\|T(u)\| \, \|T(v)\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos \widehat{u, v}$$

c.v.d.

3) siano P e Q due punti, estremi dei vettori v_P e v_Q

$$\Longrightarrow d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

Infatti: $d(T(P), T(Q)) = \|v_{T(Q)} - v_{T(P)}\| = \|T(v_Q) - T(v_P)\| =$

$= \|T(v_Q - v_P)\| = \|v_Q - v_P\| = d(P, Q)$

c.v.d.

così abbiamo dimostrato che l'operatore isometrico mantiene le distanze e gli angoli tra i vettori supponiamo che $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda$ sia autovalore per T cioè $\exists v \in V \mid T(v) = \lambda v$

$$\Longrightarrow \underbrace{\|T(v)\|}_{\|v\|} = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \Longrightarrow$$ poiché in questo modo $\|v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \longrightarrow |\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$ QUINDI

GLI UNICI AUTOVALORI REALI DI UN OPERATORE ISOMETRICO SONO +1 E -1.

Prendiamo in V una base ortonormale $B_{\perp n}$ e considero $T: V \longrightarrow V$ operatore isometrico

$\Longrightarrow$ pongo $A = [T]_{B_{\perp n}}$, dati i vettori v e $u \in V$

avrò $[u]_{B_{\perp n}} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $[v]_{B_{\perp n}} = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow [T(u)]_{B_{\perp n}} = AX \quad e \quad [T(v)]_{B_{\perp n}} = AY$$

LA MATRICE DEL PRODOTTO SCALARE RIFERITA AD UNA BASE ORTONORMALE È LA MATRICE IDENTITÀ

$$\Longrightarrow T(u) \circ T(v) = (AX)^T \cdot I \cdot (AY) = (AX)^T \cdot (AY) =$$

$$= X^T A^T A Y = X^T I Y = X^T \cdot Y$$

$$\Longrightarrow X^T Y = X^T A^T A Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n \text{ cioè } \forall u, v \in V$$

$\Longrightarrow \boxed{A^T \cdot A = I}$ cioè $A^T = A^{-1}$ <u>matrice ortogonale</u>

SONO:

$\rightarrow$ matrici quadrate invertibili tali che l'inversa è uguale alla trasposta

$\longrightarrow$ le colonne e le righe delle matrici ortogonali sono vettori ortonormali

Se A è ortogonale inoltre avrò $|A|$:

$$|A^T A| = |I| = 1 \Longrightarrow |A|^2 = 1 \Longrightarrow |A| = \pm 1$$

② Se $|A| = 1 \not\Rightarrow$ A è ortogonale: controesempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ A non è ortogonale:

$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ la matrice risultante non è l'identità

Se A è matrice ortogonale $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

$\longrightarrow |A - \lambda I| = |A - \lambda A \cdot A^T| = |A(I - \lambda A^T)| = |A|\,|I - \lambda A^T| =$
$= |A|\,|\lambda \cdot (\lambda^{-1} I - A^T)| = \pm 1 \cdot \lambda^n |\lambda^{-1} I - A| = \pm \lambda^n |A - \lambda^{-1} I| \Rightarrow \lambda = \lambda^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

(Esercizio: trovare gli autovalori della matrice ortogonale)

Proposizione: sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ operatore isometrico e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con U sottospazio invariante per T

1) U è sottospazio invariante per T^{-1}

2) $U^\perp$ (complemento ortogonale di U) è sottospazio invariante per T (e per T^{-1})

Dimostrazione 1)

U invariante per T $\Rightarrow \forall u \in U \; T(u) \in U$

$\Rightarrow$ sia $w \in U$ considero $T^{-1}(w)$. Essendo T biettiva e U invariante per T $\Rightarrow T(U) = U$

e quindi $\exists u \in U$ tale che $w = T(u)$

$\Rightarrow T^{-1}(w) = T^{-1}(T(u)) = u \in U$

Dimostrazione 2)

Voglio dimostrare che se $v \in U^\perp \Rightarrow T(v) \in U^\perp$

cioè equivalente $T(v) \cdot u = v \cdot T^{-1}(u)$

poichè $T^{-1}(u) \in U \Rightarrow v \cdot T^{-1}(u) = 0$ e quindi

$T(v) \cdot u = 0 \quad \forall v \in U^{\perp}$.

<u>Teorema di struttura degli operatori isometrici.</u>

Dato $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ operatore isometrico, $\exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n}$, rispetto alla quale:

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{array}{c} \\ p \\ \\ q \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & 0 & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & M_1 & & 0 \\ & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & & M_k \end{array} \right)$$

con $M_j \in \mathcal{M}_{2\times 2} \ \forall j = 1, \dots k$ tali che $M_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$

<u>Dimostrazione</u>: per induzione su n (dimensione di $\mathbb{R}^n$)

1) per $n = 1$ $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dove α è la nostra
$x \longrightarrow \alpha x$ autovalore ± 1

quindi abbiamo $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x$ identità, matrice associata: $A = (1)$

oppure $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow -x$ simmetria rispetto all'origine (geometricamente), matrice associata: $A = (-1)$

VERIFICATA!

③ 2) Supponiamo la proposizione verificata fino alla dimensione n e dimostriamo che sia verificata per $T: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

2') supponiamo che $\exists$ autovalori reali per il nostro operatore T; sia λ un tale autovalore
$\Rightarrow T(v) = \lambda v$ con v autovettore e considero $V = \langle\langle v \rangle\rangle$ e $V^{\perp}$ suo complemento ortogonale
$\Rightarrow \dim V^{\perp} = n+1-1 = n$ ed è invariante per T, cioè $T|_{V^{\perp}}$ (T ristretto a $V^{\perp}$) $V^{\perp} \longrightarrow V^{\perp}$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $\exists$ $\mathcal{B}$ ortonormale di $V^{\perp}$ tale che

$$[T|_{V^{\perp}}]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & M_1 & \\ & & & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & & & M_k \end{pmatrix}$$

Per il fatto che $V \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^{n+1}$ posso prendere come base di $\mathbb{R}^{n+1}$ $B \cup \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\} = B_{\perp n}$

$\Rightarrow B_{\perp n}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^{n+1}$ tale che

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} [T|_{V^{\perp}}]_B & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \pm 1 \end{pmatrix}$$

→ cambiando l'ordine dei vettori nella base ho la matrice cercata.

PER CONCLUDERE LA DIMOSTRAZIONE SI DEVE ESAMINARE IL CASO

2°) NON ESISTONO AUTOVALORI REALI.

NELLE PAGINE SEGUENTI E' DATA L'INTERA DIMOSTRAZIONE

Teorema di struttura per gli operatori isometrici di uno spazio euclideo

Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore isometrico
$\Rightarrow \exists$ una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale la matrice associata a T ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & & M_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & M_l \end{pmatrix}$$

con $M_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\operatorname{sen}\vartheta_i \\ \operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}$ $\quad i = 1, \dots, l$

Dimostrazione: per induzione su n = dimensione dello spazio

1) $n = 1$ $\quad T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: gli unici operatori isometrici su $\mathbb{R}$ sono $T(x) = x$ (l'identità) e $T(x) = -x$ (simmetria rispetto all'origine) e le matrici associate in base canonica sono $A = (1)$ e $A = (-1)$

2) Supponiamo il teorema dimostrato per dimensione dello spazio ambiente $< n$ e dimostriamolo per dimensione n.

Consideriamo il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e una sua radice λ_0:

se $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = +1$ o $\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ consideriamo un autovettore $v \in E_T(\lambda_0)$, che possiamo prendere di norma unitaria $\Rightarrow T(v) = \pm v \Rightarrow \mathcal{U} = \langle v \rangle$ è invariante per T e ha dimensione $1 \Rightarrow \mathcal{U}^\perp$ è invariante per T e ha dimensione $n-1 \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ e posso considerare $T|_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \longrightarrow \mathcal{U}^\perp$: per tale operatore il teorema è dimostrato per ipotesi di induzione $\Rightarrow$ esiste in $\mathcal{U}^\perp$ una base ortonormale, $\mathcal{B}_1$; rispetto alla quale la matrice $\left[T|_{\mathcal{U}^\perp}\right]_{\mathcal{B}_1}$ ha la forma richiesta dal teorema

Ora prendiamo come base di $\mathbb{R}^n = \{v\} \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ è ortonormale e $[T]_{\mathcal{B}}$ ha dunque la forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \left[T|_{\mathcal{U}^\perp}\right]_{\mathcal{B}_1} \end{pmatrix}$$

richiesta dal teorema.

Sia ora $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = \alpha + i\beta$; dimostriamo che esiste un sottospazio invariante di dimensione 2.

considero il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ una sua radice con $\beta \neq 0$; sia $A - \lambda_0 I$ con $A = [T]_e$

$\Rightarrow p_T(\lambda_0) = |A - \lambda_0 I| = 0 \Rightarrow$ Il sistema lineare omogeneo

$(A - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ha una soluzione non banale $Z = Z_x + i Z_y \in \mathbb{C}^n$

con $Z_x, Z_y \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ posto $[Z_x]_e = X$ e $[Z_y]_e = Y$

abbiamo $(A - \lambda_0 I)(X + iY) = 0$

$$A(X+iY) = \lambda_0 I (X+iY)$$

$$A(X+iY) = (\alpha + i\beta) I (X+iY) = (\alpha+i\beta)(X+iY)$$

$$AX + iAY = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y)$$

$\Rightarrow$ devono essere uguagliate le parti reali e le parti immaginarie dei due numeri complessi

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta Z_y \\ T(Z_y) = \beta Z_x + \alpha Z_y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $V := \langle Z_x, Z_y \rangle$ = sottospazio generato dai vettori Z_x e Z_y è invariante per T, poiché $T(V) \subseteq V$

Dimostriamo che Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti:

Per assurdo, supponiamo $Z_y = \lambda Z_x$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1) \; T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta \lambda Z_x = (\alpha - \beta\lambda) Z_x \\ 2) \; T(Z_y) = T(\lambda Z_x) = \lambda T(Z_x) = \beta Z_x + \alpha(\lambda Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases}$$

moltiplichiamo 1) per λ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1') \; \lambda T(Z_x) = (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x \\ 2) \; \lambda T(Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases}$$ $\Rightarrow$ uguagliamo i secondi membri

$$\Rightarrow (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \Rightarrow$$

$$-\beta\lambda^2 Z_x = \beta Z_x \Rightarrow -(\beta\lambda^2 + \beta) Z_x = 0 \quad \text{ma } Z_x \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\beta(\lambda^2 + 1) = 0$ ma $\beta \neq 0$ perché $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ assurdo perché $\lambda \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow$ Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ $\dim V = \dim \langle Z_x, Z_y \rangle = 2$ e posso considerare

$B_V = \{Z_x, Z_y\}$ $\Rightarrow$ e $T_1 = T|_V$ abbiamo che

$$[T_1]_{B_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A_2$$

Inoltre sappiamo che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, perché è la norma dell'autovalore $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, che essendo autovalore di un operatore isometrico, deve avere norma unitaria

$\Rightarrow$ T_1 è invertibile e $[T_1^{-1}]_{B_V} = [T_1]_{B_V}^{-1} =$

$$= A_2^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^{-1} = A_2^T$$

$\Rightarrow$ A_2 è ortogonale

$T_1 = T|_V$ è un operatore isometrico su V $\Rightarrow$

$$\langle T_1(Zx), Zx \rangle = \langle Zx, T_1^{-1}(Zx) \rangle$$

$$\langle \alpha Z_x - \beta Z_y, Z_x \rangle = \langle Z_x, \alpha Z_x + \beta Z_y \rangle$$

$$\cancel{\alpha \langle Zx, Zx \rangle} - \beta \langle Zy, Zx \rangle = \cancel{\alpha \langle Zx, Zx \rangle} + \beta \langle Zx, Zy \rangle \Rightarrow \beta \langle Zx, Zy \rangle = 0$$

essendo $\beta \neq 0$ $\Rightarrow$ $\langle Zx, Zy \rangle = 0$ $\Rightarrow$ Z_x e Z_y sono ortogonali

Si dimostra che $\|Z_x\|^2 = \|Z_y\|^2$:

$$\langle T_1(Z_x), Z_y \rangle = \langle Z_x, T_1^{-1}(Z_y) \rangle$$

$$\langle \alpha Z_x - \beta Z_y, Z_y \rangle = \langle Z_x, -\beta Z_x + \alpha Z_y \rangle$$

$$\cancel{\alpha \langle Z_x, Z_y \rangle} - \beta \langle Z_y, Z_y \rangle = \cancel{\alpha \langle Z_x, Z_y \rangle} - \beta \langle Z_x, Z_x \rangle \Rightarrow \cancel{\beta} \|Z_y\|^2 = \cancel{\beta} \|Z_x\|^2$$

$\Rightarrow$ posto $\|Z_x\| = \|Z_y\| = \mu \neq 0$, prendiamo come base $\mathcal{B}'_V$ dello spazio V, formata dai vettori ortonormali w_1 e w_2 con $w_1 = \frac{Z_x}{\mu}$ e $w_2 = \frac{Z_y}{\mu}$; avremo $[T_1]_{\mathcal{B}'_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

poiché $T_1(w_1) = \frac{1}{\mu} T(Z_x) = \alpha \frac{Z_x}{\mu} - \beta \frac{Z_y}{\mu} = \alpha w_1 - \beta w_2$

e $T_1(w_2) = \frac{1}{\mu} T(Z_y) = \beta \frac{Z_x}{\mu} + \alpha \frac{Z_y}{\mu} = \beta w_1 + \alpha w_2$

$$\Rightarrow [T_1]_{\mathcal{B}'_V} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Ora considero $V^\perp$, invariante per T, e per ipotesi di induzione, essendo $\dim V^\perp = n-2$, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}_{V^\perp}$, rispetto alla quale la matrice $\left[T|_{V^\perp}\right]_{\mathcal{B}_{V^\perp}}$ ha la forma richiesta.

Ora considero in $\mathbb{R}^n$ la base $\mathcal{B}_{V^\perp} \cup \mathcal{B}'_V = \mathcal{B} \Rightarrow$ la matrice associata a T in tale base sarà:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left[T|_{V^\perp}\right]_{\mathcal{B}_{V^\perp}} & \\ & \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

come volevasi dimostrare. ∎