Def: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ (vettori di V), allora chiamiamo
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ dove $\alpha_j \in \mathbb{R}$ $\forall j = 1, \dots, k$
COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $v_1, \dots, v_k$
Il risultato, ovviamente, è ancora un vettore.

Esempio: $\mathbb{R}^3$ dati $v_1 = (1,2,3)$ et $v_2 = (-1,0,2)$
$\Rightarrow$ una loro combinazione lineare sarà $\sqrt{2}\, v_1 + \frac{1}{2} v_2 =$
$= \sqrt{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(-1,0,2) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) + (-\frac{1}{2}, 0, 1) =$
$= (\sqrt{2} - \frac{1}{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} + 1)$.

Definizione: $v_1, v_2, \dots v_k \in V$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI
se e solo se posto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$
allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ e viceversa.

Definizione: $v_1\, v_2 \dots, v_k \in V$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI
se posto $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_j \neq 0$ per almeno un $j = 1, \dots, k$

Esempio: $\mathbb{R}^3$ dati $v_1 = (1,2,3)$ et $v_2 = (-1,0,2)$
Sono linearmente indipendenti?

Pongo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-1,0,2) = (0,0,0)$
$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 - 0, 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I due vettori dati sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

Considero la forma matriciale: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \quad X = 0$$

! [NOTA BENE: LA matrice in colonna ha i vettori che noi abbiamo usato.

Con Gauss,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{2R_1 - R_2 = R_2 \\ 3R_1 - R_3 = R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \overset{5R_2 - 2R_3 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e qui mi fermo, perché ho ottenuto una matrice a gradini.
E vedo anche che ho 2 PIVOT, quindi è di RANGO $= 2$.
E coincide anche col numero di vettori linearmente indipendenti della matrice.

PROPOSIZIONE: Il rango di una matrice coincide con il numero dei vettori colonna della matrice stessa linearmente indipendenti.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \overset{R_2 = 2R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Qui ho ottenuto una ~~[illegible]~~ matrice a gradini con un unico pivot.
$\Rightarrow$ Qui c'è solo un unico vettore linearmente indipendente.

Esempio. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{R_2 = 2R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to$ 2 gradini qui. Due pivot. $\Rightarrow$ 2 vettori linearmente indipendenti.

Per vedere quali vettori sono sicuramente linearmente indipendenti, prendo le colonne dei PIVOT.
Nell'esempio, la prima e la terza. E qui vado sul sicuro.

Due vettori di uno spazio vettoriale V sono linearmente dipendenti se sono uno multiplo dell'altro.

Supponiamo che $v_1, \dots, v_k$ siano linearmente dipendenti

$\Rightarrow$ posto $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ $\exists\, \alpha_j \neq 0$, per almeno un $j = 1, \dots, k$, (per la definizione che abbiamo dato)

$\Rightarrow$ moltiplico per $\dfrac{1}{\alpha_j}$ i due membri della uguaglianza

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_j} v_2 + \dots + v_j + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_j} v_k = 0$$

Isolo v_j.

$$\Rightarrow v_j = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_{j+1} v_{j+1} + \dots + \beta_k v_k \Rightarrow$$

$\exists$ ALMENO UN VETTORE CHE È DATO COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI.

Nel caso particolare di due vettori $v_1, v_2 \Rightarrow v_1 = \beta v_2$.

Sviluppiamo ora il concetto di GENERATORI.

Definizione: Siano $v_1, \dots, v_k \in V \Rightarrow$ diciamo che $v_1, \dots, v_k$ GENERANO V (o si dice anche che sono generatori di V) se ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare dei k vettori dati.

Esempio: In $\mathbb{R}^2$ prendiamo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Mi chiedo se ogni altro vettore di $\mathbb{R}^2$ può essere scritto come combinazione lineare di v_1 e v_2.

Considero il vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists\, \alpha_1 e\ \alpha_2 \in \mathbb{R} \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$?

[NOTA BENE: d'ora in avanti i vettori li scriviamo in colonna]

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 5\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 = -1 \end{cases}$$

e cerco se esiste una soluzione per il sistema impostato.

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 - 5\alpha_2 \\ -2 - 10\alpha_2 + 7\alpha_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vedo ora se riesco a risolvere per qualunque vettore

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 5\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = x - 5\alpha_2 \\ 2x - 10\alpha_2 + 7\alpha_2 = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x + \frac{5}{3}y - \frac{10}{3}x = \frac{-7x+5y}{3} \\ \alpha_2 = \frac{y+2x}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Qualunque siano i valori di x e y, riesco comunque a trovare i miei α_1 e α_2.

Altro esempio, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = x - 2\alpha_2 \\ 2x - 4\alpha_2 + 4\alpha_2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = x - 2\alpha_2 \\ 2x = y \end{cases}$$

In questo caso x e y sono legati e α_1 e α_2 dipendono solo dal valore di x. QUINDI ESISTONO VETTORI DI $\mathbb{R}^2$ CHE NON SI POSSONO SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI V_1 E V_2.

DEFINIZIONE. Dati k vettori $v_1, \dots, v_k \in V \Rightarrow$ lo spazio generato da $v_1, \dots, v_k$ è l'insieme delle combinazioni lineari dei k vettori.

Si indica $\langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$ = Spazio generato da $v_1, \dots, v_k$ $= (\text{Span}(v_1, \dots, v_k))$.

Banalmente, $v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_k$

Idem per $v_2, v_3, \dots, v_k$

$\Rightarrow$ i vettori $v_1, \dots, v_k \in$ allo spazio che generano.

ESERCIZIO

$\langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V (da fare).

Esempio: Considero $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti?

(da fare). ~~[illegible]~~ (R: NO).

RISOLUZIONE:

Cerchiamo $\langle\langle v_1, v_2, v_3\rangle\rangle$. $\Rightarrow$ dato $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ cerco $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$

Tale che $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 = v$

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=x\\ 2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3=y\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&x\\2&4&-1&y\end{array}\right)\overset{2R_1-R_2\to R_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&x\\0&2&3&2x-y\end{array}\right)$$

$$\overset{2R_1-3R_2:1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-7&2x-6x+3y\\0&2&3&2x-y\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{7}{2}&\frac{-4x+3y}{2}\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{2x-y}{2}\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ mi riporto a un sistema $\neq$ da quello iniziale ma con le stesse soluzioni. Equivalente.

$$\begin{cases}\alpha_1-\frac{7}{2}\alpha_3=\frac{-4x+3y}{2}\\ \alpha_2+\frac{3}{2}\alpha_3=\frac{2x-y}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1=\frac{-4x+3y}{2}+\frac{7}{2}\alpha_3\\ \alpha_2=\frac{2x-y}{2}-\frac{3}{2}\alpha_3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ α_1, α_2 dipendono da α_3 e x ed y.

P. esempio

$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $\alpha_3=1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3v_1-v_2+v_3$

Definizione: Dato V spazio vettoriale chiamo BASE di V l'insieme costituito dal numero massimo di generatori di V linearmente indipendenti.