MERCOLEDÌ 28/05/14

DATO UNO SPAZIO VETTORIALE V, $(n+1)$ DIMENSIONALE, SI DEFINISCE LO <u>SPAZIO PROIETTIVO</u>, $\mathbb{P}(V)$, COME L'INSIEME DEI SOTTOSPAZI 1-DIMENSIONALI DI V.

$\dim \mathbb{P}(V) = n$

[SE V È UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE, HO UNA STELLA DI RETTE CHE INTERSECA UN PIANO NEI SUOI PUNTI CON L'AGGIUNTA DI PUNTI ALL'INFINITO DATI DALL'INTERSEZIONE DELLE RETTE SU PIANI PARALLELI AL PIANO DATO]

- POSSIAMO DARE TRA I VETTORI DI V LA RELAZIONE $v_1 \sim v_2 \iff \exists \lambda \neq 0$, $\lambda \in K$ (CAMPO), TALE CHE $v_2 = \lambda v_1$, LA RELAZIONE È DI EQUIVALENZA E QUINDI POSSIAMO DEFINIRE LA CLASSE DI EQUIVALENZA $[v]$ $\forall v \in V, v \neq 0$, E TALE $[v]$ DEFINISCE UN PUNTO DI $\mathbb{P}(V)$

- SE $W < V \Rightarrow$ SI DEFINISCE $\mathbb{P}(W) \Rightarrow$ SE $\dim W$ È $k \Rightarrow$ $\Rightarrow \dim \mathbb{P}(W) = k-1$. $\mathbb{P}(W)$ È VISTO COME UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{P}(V)$; LE CODIMENSIONI RIMANGONO LE STESSE: INFATTI

$$= \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = \dim V \cancel{-1} - \dim W \cancel{+1} = \text{codim. di } W \text{ in } V$$

= CODIMENSIONE DI $\mathbb{P}(W)$

- I SOTTOSPAZI DI $\mathbb{P}(V)$ DI CODIMENSIONE 1 SONO DETTI $\boxed{\text{IPERPIANI}}$ DI $\mathbb{P}(V)$, DEFINITI DA UN'UNICA EQUAZIONE CHE CORRISPONDE ALL'EQUAZIONE DI W COME IPERPIANO DI V: AD ESEMPIO, SE CONSIDERO IL SOTTOSPAZIO $\pi: 2x + 3y + 4z = 0$ DI $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ L'EQUAZIONE $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$ È L'EQUAZIONE <u>OMOGENEA</u> DELLA RETTA CORRISPONDENTE IN $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

[IN OGNI CASO LE EQ. DEGLI SPAZI PROIETTIVI DEVONO ESSERE <u>OMOGENEE</u>, TUTTI I SUOI RAPPRESENTATI DI EQUIVALENZA LA RAPPRESENTANO, MOLTIPLICANDO PER OGNI $\lambda \neq 0$]

- SE CONSIDERIAMO DUE SOTTOSPAZI $W_1 = W_2$ (INTERNALI) DI $V \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_2)$ SONO SOTTOSPAZI DI $\mathbb{P}(V) \Rightarrow$ VALE L'UGUAGLIANZA:

$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

DEFINIAMO $\mathbb{P}(W_1) + \mathbb{P}(W_2) = \langle\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle\rangle \Rightarrow$ SUSSISTE QUESTA UGUAGLIANZA (IDENTITÀ DI GRASSMANN PROIETTIVA):

$\dim \langle\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle\rangle = \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) - \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$

- DUE SOTTOSPAZI DI $\mathbb{P}(V)$ SI DICONO IN <u>POSIZIONE GENERALE</u> SE LA LORO INTERSEZIONE HA LA MINIMA DIMENSIONE POSSIBILE

- PRENDO $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (RETTA PROIETTIVA REALE)

  COME SOTTOSPAZI (PROIETTIVI) DI $\mathbb{P}^1$ ABBIAMO $\mathbb{P}^1$ STESSO, ZERO E ~~[illegible]~~ E TUTTI I PUNTI DATI DALLE CLASSI DI EQUIVALENZA DEI VETTORI DI $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

  LA DIMENSIONE MINIMA POSSIBILE DELL'INTERSEZIONE È QUELLA DEL VUOTO (DIMENSIONE -1)

- $V = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	PUNTO	RETTA
PUNTO	$\emptyset$	$\emptyset$
RETTA	$\emptyset$	PUNTO

-

$\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$	RETTE	PIANI
RETTE	$\emptyset$	PUNTO
PIANI	PUNTO	RETTA

(ESCLUDENDO I PUNTI)

$\rightarrow$ MINIME INTERSEZIONI POSSIBILI

- $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$ RETTA PROIETTIVA DI $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ NELLE COORDINATE $[x_1, x_2, x_3]$

  SE VOGLIO STUDIARE LA RETTA LA CONSIDERO IN $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ COME SPAZIO AFFINE, NON CONSIDERANDO LA RETTA ALL'INFINITO (~~[illegible]~~ $x_3 = 0$ RETTA ALL'∞

SUPPONIAMO $x_3 \neq 0$, POSSO DIVIDERE PER x_3 = PONGO

$x = \frac{x_1}{x_3}$; $y = \frac{x_2}{x_3}$ $\Rightarrow$ L'EQUAZIONE DIVENTA $2\frac{x_1}{x_3} + 3\frac{x_2}{x_3} + 4 = 0$

$\Rightarrow 2x + 3y + 4 = 0$ RETTA VISTA IN $\mathbb{R}^2$

- SIA V SPAZIO VETTORIALE, $\dim V = n+1 \Rightarrow$ IN $\mathbb{P}(V)$ CONSIDERO $P_1, \dots, P_k$ PUNTI $\Rightarrow$ ESSI INDIVIDUANO k VETTORI DI V, $v_1, \dots, v_k$; RAPPRESENTANTI DI OGNI CLASSE DI EQUIVALENZA DEI k PUNTI DI $\mathbb{P}(V)$

DEFINIZIONE:

$\Rightarrow$ DEFINIAMO $P_1, \dots, P_k$ LINEARMENTE INDIPENDENTI SE LO SONO I k VETTORI $v_1, \dots, v_k$

DEFINIZIONE

- $P_1, \dots, P_k$ SONO DETTI IN <u>POSIZIONE GENERALE</u> SE:

1) SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, NEL CASO IN CUI $k \leq n+1$

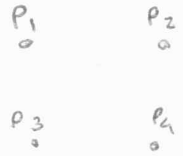
2) $n+1$ TRA ESSI COMUNQUE SCELTI SONO INDIPENDENTI, NEL CASO $k > n+1$

IN $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ 3 PUNTI POSSONO ESSERE INDIPENDENTI

SONO IN POSIZIONE GENERALE

4 PUNTI SEMPRE DI $\mathbb{P}^2$ SONO IN POSIZIONE GENERALE SE A 3 A 3 SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

CIOÈ



- IN V CONSIDERO UNA BASE $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n+1}\} \Rightarrow v \in V$ È TALE CHE $v = \sum_{i=1}^{n+1} x_i v_i \Rightarrow$ GLI SCALARI $(x_1, \dots, x_{n+1})$ SONO LE CORDINATE OMOGENEE DI $[v]$ IN $\mathbb{P}(V)$.

LE CORDINATE OMOGENEE SONO DETERMINATE A MENO DI MULTIPLI SCALARI

I PUNTI $[1,0,\dots,0]$, $[0,1,0,\dots,0]$, $\dots$, $[0,\dots,0,1]$ PUNTI FONDAMENTALI DEL <u>RIFERIMENTO PROIETTIVO</u> DEFINITO DA $\mathcal{B}_V$

INOLTRE ABBIAMO IL PUNTO UNITÀ $[1,1,\dots,1]$

SE $\mathcal{B}_V$ È $\mathcal{C} \Rightarrow$ IL RIFERIMENTO PROIETTIVO È DETTO <u>STANDARD</u>

SE ASSEGNO $n+2$ PUNTI DI $\mathbb{P}^n$ IN POSIZIONE GENERALE $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $n+1$ DI ESSI DEFINISCONO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PROIETTIVO DI CUI ESSI SONO I PUNTI FONDAMENTALI ED IL <u>$n+2$-ESIMO PUNTO COSTITUIRÀ</u> IL PUNTO UNITÀ NEL SISTEMA DI CORDINATE DA ESSI DEFINITO esempio :

IN $\mathbb{P}^1$ PRENDO TRE PUNTI : $P_0=[1;2]$, $P_1=[3;-1]$, $P_3=[1;1]$
SONO IN POSIZIONE GENERALE POICHÉ I CORRISPONDENTI VETTORI SONO A 2 A 2 L. INDIP.

PONGO $\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha+3\beta=1\\2\alpha-\beta=1\end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases}\alpha+6\alpha-3=1\\ \beta=2\alpha-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=4/7\\ \beta=1/7\end{cases} \quad \begin{pmatrix}4/7\\8/7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/7\\-1/7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

INDIVIDUANO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO — PUNTO UNITÀ

$$P_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}4/7\\8/7\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3/7\\-1/7\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ a e b $(a;b)$ SONO LE COORDINATE OMOGENEE DI P_0 NEL NOSTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO

- DEFINIZIONE :

DATI DUE SPAZI PROIETTIVI $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(\hat{V})$ $\Rightarrow$ UN' APPLICAZIONE $f:\mathbb{P}(V)\longrightarrow\mathbb{P}(\hat{V})$ SARÀ UN MORFISMO DI SPAZI VETTORIALI
$\Longleftrightarrow \exists\, \varphi: V\to\tilde{V}$ LINEARE TALE CHE $f[v]=[\varphi(v)]$

SE LE APPLICAZIONI SONO BIETTIVE SI PARLA DI <u>ISOMORFISMO</u>

UN ISOMORFISMO DI UNO SPAZIO PROIETTIVO IN SÈ È DETTO <u>PROIETTIVITÀ</u>

UNA CONICA IN $\mathbb{P}^2$ È DEFINITA DA UN' EQ. OMOGENEA DI 2° GRADO, DEL TIPO $a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$

LE UNICHE CONICHE IRRIDUCIBILI DI $\mathbb{P}^2$ NON DEGENERI SONO :
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ $\quad P=0$
$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ $\rightarrow$ UNICA CONICA NON IRRIDUCIBILE (SCUSSE?) NEL PIANO.