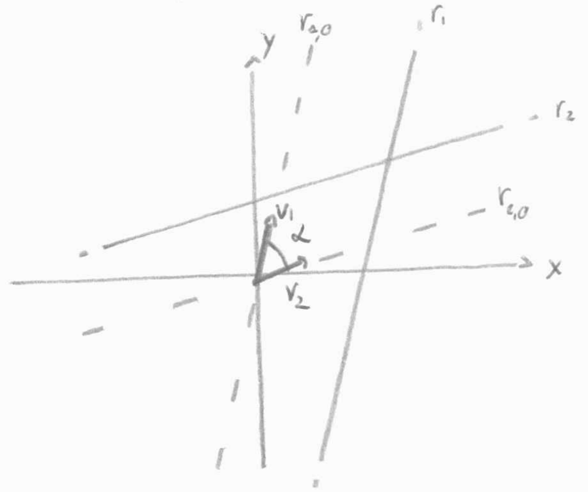
Geometria analitica

Date due rette nel piano euclideo definiamo il coseno dell'angolo fra esse:

siano $r_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ ed $r_2: a_2x+b_2y+c_2=0$



$r_{1,0}: a_1x+b_1y=0$ e $r_{2,0}: a_2x+b_2y=0$ sono le rette parallele alle rette date e passanti per l'origine. (DIREZIONI DELLE RETTE DATE)

v_1 e v_2 sono i parametri direttori delle rette $r_{1,0}$ e $r_{2,0}$: $v_1=\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ e $v_2=\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\,\|v_2\|}$$

Se una delle due rette coincide con uno degli assi del sistema di riferimento considerato, allora il $\cos\alpha$ é detto coseno direttore della retta diversa dagli assi.

Ad esempio se r_2 fosse un asse del sistema di riferimento cartesiano considerato, allora il $\cos\alpha$ sarà il coseno direttore di r_1.

<u>Esempio:</u>

$r_2: y=0$ e $r_1: a_1x+b_1y+c_1=0$, oppure $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

L'asse y ha eq. vettoriale: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ il coseno direttore di r_1 sarà dato da: $\cos\alpha = \pm \dfrac{\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} = \pm \dfrac{l_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}$

Esercizio: ricavare la formula della distanza di un punto $P = (p_1; p_2)$ da una retta $r: ax + by + c = 0$

Date due rette $r_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ e $r_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Quando r_1 è perpendicolare ad r_2?

- Quando lo sono le loro direzioni, perciò posso lavorare con gli spazi vettoriali associati: $a_1 x + b_1 y = 0$ e $a_2 x + b_2 y = 0$.
  Se esamino l'equazione $r: ax + by = 0$, noto che ogni vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che la soddisfa è perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, quindi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è un vettore perpendicolare alla retta r e di conseguenza la retta generata da $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è perpendicolare alla retta $ax + by = c$.

  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \perp r_1 \quad e \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \perp r_2 \Rightarrow se \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 \perp r_2$$

  $$\Rightarrow r_1 \perp r_2 \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

Esercizio: distanza di un punto da una retta, e di un punto dal piano nello spazio;

Esercizio: distanza fra due rette nello spazio: ESAMINARE IL CASO DI RETTE SGHEMBE.

Perpendicolarità tra due rette nello spazio

Prese r_1 ed r_2, rette qualunque di $\mathbb{R}^3$, consideriamo le loro direzioni:

$$r_{1,0}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \qquad r_{2,0}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r_1 \perp r_2 \iff \underbrace{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}_{\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}} = 0$$

Perpendicolarità tra due piani in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo l'equazione cartesiana dei piani π_1 e π_2:

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Consideriamo la giacitura di entrambi i piani, imponendo $d_1 = d_2 = 0$, allora:

$$\pi_{1,0} : a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\pi_{2,0} : a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ le rette generate da $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sono perpendicolari, rispettivamente, a π_1 e π_2. Allora $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

Perpendicolarità retta - piano in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow r \perp \pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\ell}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Particolari applicazioni lineari fra spazi euclidei

Considero uno spazio euclideo n-dimensionale, $\mathbb{R}^n$ e diamo un operatore $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, che verifica la seguente proprietà:

- T è invertibile;
- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che $x \cdot T(y) = T^{-1}(x) \cdot y$;

Un tale operatore è detto isometrico.
Mantiene la distanza tra vettori cioè la distanza tra le immagini di due vettori coincide con la distanza tra i due vettori di partenza.
Mantiene la lunghezza di un vettore, cioè la sua norma cioè $\|T(v)\| = \|v\| \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n$. Infatti, $\|T(v)\| = \sqrt{T(v) \cdot T(v)} = \sqrt{v \cdot v} = \|v\|$