Siano $U$ e $W < V$ di cui abbiamo le basi $B_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ e $B_W = \{w_1 \dots w_h\}$ $\Rightarrow$ Cerchiamo una base di $U+W$ e di $U \cap W$.

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k & w_1 & w_2 & \dots & w_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ devo cercare quali vettori sono linearmente indipendenti

Per come è definito $U+W$, si ha $U+W = \langle\langle u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_k \rangle\rangle$ (trovando i lin. indip trovo una base).

Una base $B$ di $U+W$ è costituita dai vettori linearmente indip. fra i generatori.

Cerco una base di $U \cap W$.

- riduco la matrice $A$ alla forma a gradini canonica. Arriverò a una forma del genere:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{e_1 & e_2 & \dots & e_k}_{\text{sono lin indip}} & e_{k+1} & v_{k+2} & e_k & \dots v_r & e_p \\ & & & & 0 & a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ & & & & \vdots & a_2 & & b_2 & \vdots \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ \dots & & & & 0 & a_{k+1} & & b_{k+1} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & & b_{k+2} & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & & b_{h-1} & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è linearmente dipendente

$e_1, \dots, e_k$ siamo sicuri siano lin indip.

Quelli successivi non si sa.

$a_{k+1} \neq 0$

$v_{k+2}$ è linearmente dipendente $\Rightarrow v_{k+2} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_k e_k + a_{k+1} e_{k+1}$

le colonne si trasformano in maniera casuale ~~ma~~ nella forma canonica ma sappiamo che il vettore $w_2$ si scrive come:

$$w_2 = \underbrace{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k}_{\text{vettori della base } B_U} + \underbrace{a_{k+1} w_1}_{\text{vettori della base } B_W}$$

$\Downarrow$

$w_2 - a_{k+1} w_1 = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$

$v_r$ è un'altro vettore linearmente dipendente: $\Rightarrow$

$v_r = b_1 e_1 + \dots + b_k e_k + b_{k+1} e_{k+1} + \dots + b_{p-1} e_{p-1} \Rightarrow w_{h-1} = b_1 u_1 + \dots + b_k u_k + b_{k+1} w_1 + \dots + b_{p-1} w_{h-2} \Rightarrow \underbrace{w_{h-1}\, b_{k+1} w_1 - \dots - b_{p-1} w_{h-2}}_{\text{questo vettore } \in W} = \underbrace{b_1 u_1 + \dots + b_k u_k}_{}$

questo vettore $\in W$, MA ESSO APPARTIENE ANCHE AD $U$

QUINDI TALI VETTORI APPARTENGONO AD $U \cap W$ E NE COSTITUISCONO UNA BASE esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siamo in $\mathbb{R}^4$. $\sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & & e_3 & \end{pmatrix}$$

$u_1$, $u_2$: generano il sottospazio U

$w_1$, $w_2$, $w_3$: generano il sottospazio W

ottengo questa matrice in forma canonica.

Una base $B_{U+W} = \{u_1, u_2, w_2\}$ e $B_{U \cap W} = \{u_1 + 2u_2,\ \sqrt{2}u_1 - 3u_2\}$

Scrivo i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ come COMBINAZIONE LINEARE DEI vettori di U in quanto si trovano nell'intersezione di U e W (posso esprimerli come combinazione lineare dei generatori di U o W, a mia scelta).

PROPOSIZIONE

Dato $U < V$ con dimensione di $U = K \leq \dim V = n \Rightarrow \exists\ W < V$ tale che $U \oplus W = V$.

W è detto supplementare di U.

W non è unico.

$\dim W = n - K$ (ha dimensione complementare).

esempio

Data $r = \begin{cases} x = y \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ retta in $\mathbb{R}^3$. cerchiamo un supplementare di r.

- Trovo un qualsiasi piano che non contenga la retta.

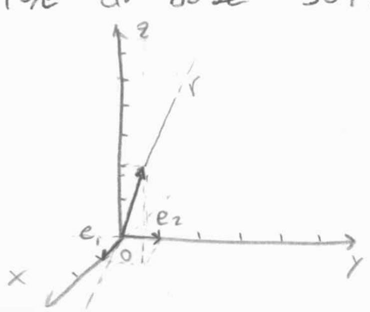
Se sono in $\mathbb{R}^3$ il supplementare di una retta (avente dimensione 1) è un piano (avente dimensione 2).

- cerco una base di r:

$\begin{cases} x = y \\ 2x = z \end{cases}$ ho due variabili dipendenti $(y, z)$ e una variabile indipendente $(x)$.

| y | z | x |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |

il vettore di base sarà: $B_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$




Una base di U unita a una base di W mi devono dare $\mathbb{R}^3$.

$e_1$ e $e_2$ generano il piano $z = 0$ (il piano x, y). Questo piano è un supplementare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ base:

sono lin indip.

Cerco i vettori linearmente indipendenti con $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ Sono lin indip.

Allora W è generato dai vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

e ha equazione:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = \emptyset \end{cases}$$

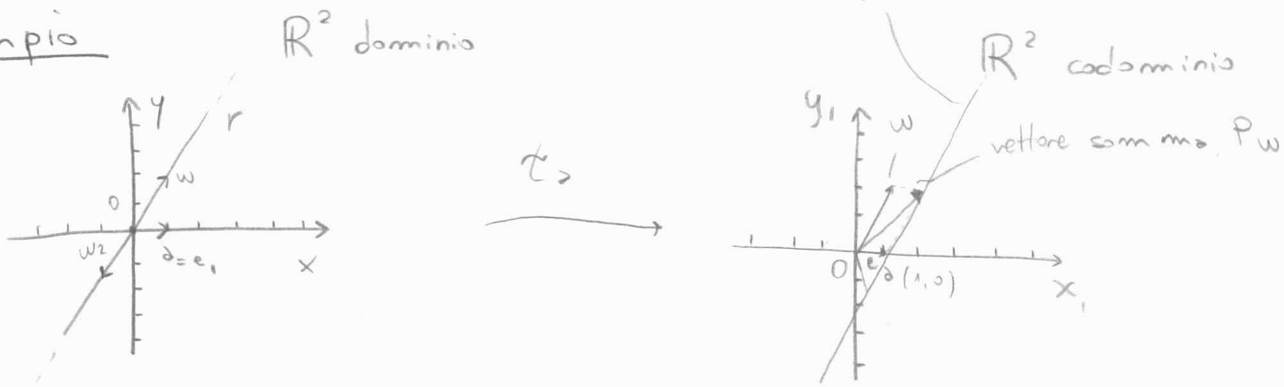
---

Sia $\tau_a \quad \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ (traslazione). con $a \in \mathbb{R}^n$. È un'applicazione
$\quad v \longmapsto v+a$

biettiva. $\tau_a$ è detta <u>traslazione di vettore a</u>.

Sia W sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. $\tau_a(W) = \{a + w \mid w \in W\} =$
$= a + W$

<u>Esempio</u>




Traslazione di O → a(1,0). traslazione di r → $w + e_1 = P_w$ (w è base di r)

$\tau_a(W)$ per definizione è detto <u>sottospazio affine</u> dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

Il sottospazio vettoriale W è detto <u>GIACITURA</u> o <u>DIREZIONE</u> dello spazio affine $\tau_a(W)$.

Si estende il concetto di dimensione al sottospazio affine: la sua dimensione è quella della sua direzione.

<u>DEFINIZIONE</u>

2 sottospazi affini di ugual dimensione sono paralleli se hanno le

stessa direzione.
Se hanno dimensione diversa sono paralleli se una direzione è contenuta nell'altra.
Un sottospazio vettoriale può essere uno spazio affine (con una traslazione di vettore nullo) ma uno spazio affine non è uno spazio vettoriale. IN GENERALE.

PREPOSIZIONE

Sia $A$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n \Rightarrow A = a + W$ con $a \in \mathbb{R}^n$ e $W < \mathbb{R}^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}^n \mid A = b + W$.
(basta prendere $b$ in $A$).
$A = t_a(W) = t_b(W) \Rightarrow$ ci sono infiniti vettori che ci danno la stessa traslazione.
(da dimostrare $A \subset b+W$ e $b + W \subset A$.)

OSSERVAZIONE

Dato $A$ sottospazio affine la sua direzione è unica.

Sottospazi affini del piano:
i punti sono sottospazi affini del piano di dimensione $\emptyset$.
le rette sono sottospazi affini del piano di dimensione 1.

Sottospazi affini di dimensione 1 (rette in $\mathbb{R}^2$). $ax + by + c = \emptyset$
equazione di una retta in $\mathbb{R}^2$ : $ax_1 + bx_2 + c = \emptyset$ (È un sistema lineare non omogeneo) La sua direzione ha equazione $ax + by = \emptyset$.
Un sottospazio affine è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo.

Equazione parametrica: $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b} \end{cases}$

esercizio

Equazione cartesiana di una retta // alla retta $r: 2x + 3y - 1 = \emptyset$ e passante per $P = (1, 1)$.

Direzione di $r = r_0 = 2x + 3y = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la retta cercata sarà $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -\frac{2}{3}t + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ y = -\frac{2}{3}(x - 1) + 1 \end{cases}$ Sostituisco $(1,1)$ a $2x + 3y - 1 = 0$ $\rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$