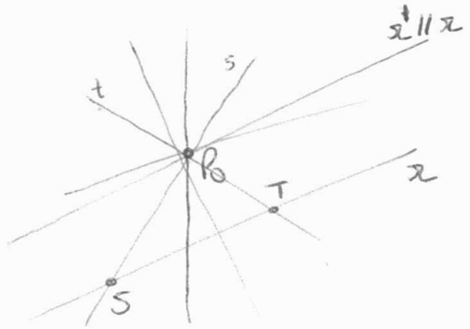
Consideriamo un punto P_0 e un fascio di rette passante per esso in uno spazio vettoriale



Prendo una retta r e considero le intersezioni di questa con le rette del fascio

Ho una corrispondenza che chiamiamo f:

$$f : \{\text{rette fascio per } P_0 \notin r\} \to r$$
$$s \longmapsto S = s \cap r$$

Considero $r' \parallel r$ che appartiene al fascio $\Rightarrow r' \cap r = \emptyset$

$$\Rightarrow f : \{\text{rette fascio per } P_0 \notin r\} - \{r'\} \to r$$
$$s \longmapsto S = s \cap r$$

r' ED r HANNO LA STESSA DIREZIONE, COME TUTTE LE RETTE DEL FASCIO //, QUESTA DIREZIONE DEFINISCE IL PUNTO ALL'∞, r_∞, CHE PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME IL LORO PUNTO D'INTERSEZIONE

$$\Rightarrow f : \{\text{rette del fascio per } P_0 \notin r\} \to r' \cup r_\infty$$
$$s \longmapsto s \cap r$$

Ad ogni retta posso aggiungere un punto all'infinito in questo punto si intersecano tutte le rette ~~a a~~ parallele a quella considerata.

Tutti i punti all'infinito stanno su una retta all'infinito aggiunta al piano considerato

Possiamo identificare il punto all'infinito con la direzione della retta

HO CREATO UN NUOVO PIANO IN CUI DUE RETTE SI INTERSECANO SEMPRE IN UN PUNTO, LA GEOMETRIA È CAMBIATA.

QUESTO PIANO È DETTO PIANO PROIETTIVO REALE: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

NEL PIANO $\mathbb{R}^2$ CONSIDERO UN PUNTO A DI COORDINATE $(x;y)$ => AD OGNI PUNTO P DEL PIANO ASSOCIO TRE NUMERI REALI (x_1, x_2, x_3) TALI CHE, SUPPOSTO $x_3 \neq 0$, $x = \frac{x_1}{x_3}$ e $y = \frac{x_2}{x_3}$

Esempio: se $v = (-1, 2)$ => posso dare la terna $(-3, 6, 3) \Rightarrow x = -1 = \frac{-3}{3}$ e $y = \frac{6}{3} = 2$

Questa terna non è unica ma è definita a meno di una costante.

Anche la terna $(-6, 12, 6)$ identifica le stesse due coordinate

POSSIAMO INTRODURRE UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA TRA LE TERNE (x_1, x_2, x_3) TALE CHE ~~(x_1, x_2, x_3)~~

$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ TALE CHE

$y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$ e $y_3 = \lambda x_3$

=> HO LA CLASSE DI EQUIVALENZA PER LA TERNA (x_1, x_2, x_3) CIOÈ $[x_1, x_2, x_3]$ => TUTTA LA CLASSE DI EQUIVALENZA IDENTIFICA (x, y)

$\Rightarrow$ (x_1, x_2, x_3) SONO LE COORDINATE OMOGENEE DEL PUNTO (x, y)

CONSIDERO DUE RETTE NEL PIANO $\mathbb{R}^2$ DI EQUAZIONE $ax+by+c=0$ e $a_1x+b_1y+c_1=0$

$\Rightarrow$ LE INTERSECO $\Rightarrow$ $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a_1 & -c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \begin{vmatrix} -c & b \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix} \qquad x_2 = \begin{vmatrix} a & -c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ IL PUNTO DI INTERSEZIONE AVRÀ COORDINATE OMOGENEE $\cancel{((-cb_1+c_1b), (-ac_1}$

$$((-cb_1+c_1b), (-ac_1+a_1c), (\underbrace{ab_1-ba_1}))$$

LE DUE RETTE SONO $\parallel$ QUANDO QUESTO DETERMINANTE È NULLO $\Rightarrow$ I PUNTI ALL'INFINITO HANNO L'ULTIMA COORDINATA NULLA.

: QUINDI IN QUESTA RAPPRESENTAZIONE DELLE COORDINATE OMOGENEE, I PUNTI ALL'INFINITO HANNO, NELLE COORDINATE OMOGENEE, LA TERZA COORDINATA NULLA.

QUESTO PERCHÈ ABBIAMO DECISO DI DIVIDERE PER LA TERZA COORDINATA, POTEVA ESSERE UNA QUALSIASI DELLE ALTRE.

L'EQUAZIONE CARTESIANA DI UNA RETTA NEL PIANO $ax+by+c=0 \Rightarrow$ NEL PIANO PROIETTIVO HA EQUAZIONE $a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c=0 \Rightarrow$

$ax_1+bx_2+cx_3=0$ SI DICE EQUAZIONE OMOGENEA

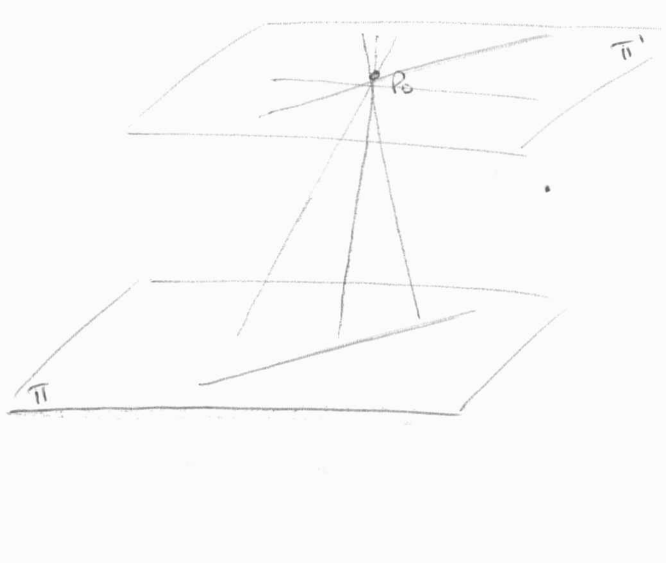
$x_3=0$ È L'EQUAZIONE DELLA RETTA ALL'∞

$\Rightarrow$ IL PUNTO ALL'∞ DELLA RETTA $a_1x_1+b_1x_2+cx_3=0$

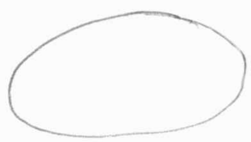
È DATO $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1+bx_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2=-\frac{a}{b}x_1 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow [1,-\frac{a}{b},0]$

$\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$



NEL PIANO PROIETTIVO ESISTE SOLO UNA CONICA $\mathcal{C}$ IRRIDUCIBILE:

:  $\mathcal{C}$

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE

$\Rightarrow$ DEFINIAMO LO SPAZIO PROIETTIVO ~~COME~~ ASSOCIATO A V, $\mathbb{P}(V)$, COME L'INSIEME DEI SOTTOSPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE 1 DI V

SE V HA DIMENSIONE n $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(V)$ HA DIMENSIONE $n-1$

SIA $v \in V$, NON NULLO, $\Rightarrow$ POSSO CONSIDERARE

$\langle\langle v \rangle\rangle = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

DUE VETTORI v_1, v_2 DEFINISCONO LO STESSO PUNTO DI $\mathbb{P}(V)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ TALE CHE $v_2 = \lambda v_1$

(CIOÈ SE I VETTORI STANNO SULLA STESSA RETTA PER L'ORIGINE)

$\Rightarrow$ IL PUNTO COSÌ DEFINITO $\in \mathbb{P}(V)$ E SI INDICA CON $[v]$

<u>DEFINIZIONE</u>: IN V CONSIDERO UNA BASE

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\Rightarrow$ $v \in V$ È DATO DA $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$\Rightarrow$ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ DEFINISCE LE COORDINATE OMOGENEE DEL PUNTO $[v]$ DI $\mathbb{P}(V)$

I PUNTI $[1,0,0,\dots,0]$ $[0,1,0,\dots,0]$ ... $[0,0,\dots,0,1]$

SI DICONO PUNTI FONDAMENTALI DEL

RIFERIMENTO PROIETTIVO DEFINITO DA $e_1,\dots,e_n$

IL PUNTO $[1,1,\dots,1]$ È DETTO <u>PUNTO UNITÀ</u>