25/11/13

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale e U e W suoi sottospazi

$\Rightarrow \dim U \leq n$ e $\dim W \leq n$.

Considero $U \cap W = \{v \in V / v \in U \text{ e } v \in W\}$: é sottospazio vettoriale di V.

1) il vettore nullo $\in U \cap W$ perché $0 \in U$ e $0 \in W$ perché sottospazi

2) Siano v_1 e $v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$?

$v_1 \in U \cap W \Rightarrow v_1 \in U$ e $v_1 \in W$; $v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_2 \in U$ e $v_2 \in W$,

Ma, poiché v_1 e $v_2 \in U \{ V \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$; analogamente $v_1 + v_2 \in W$

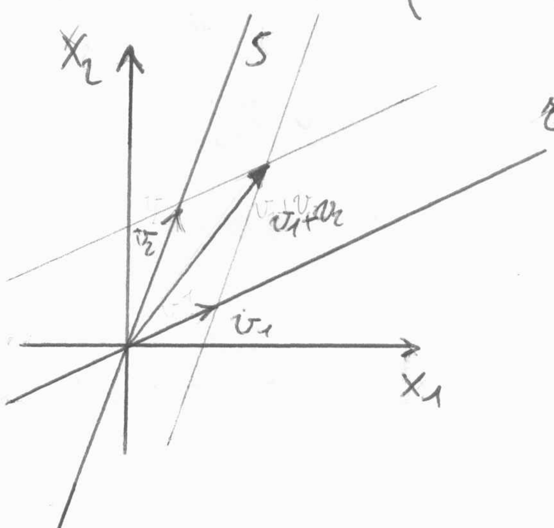
$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W \Rightarrow U \cap W$ è chiusa rispetto alla somma.

3) Sia $U \cap W \Rightarrow v \in U$ e $v \in W \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha v \in U$ e $\alpha v \in W$

$\Rightarrow \alpha v \in U \cap W \Rightarrow U \cap W$ é chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Considero $U \cup W = \{v \in V / v \in U \text{ o } v \in W\} \Rightarrow U \cup W$ é un sottospazio di V)

No in generale. Controesempio:

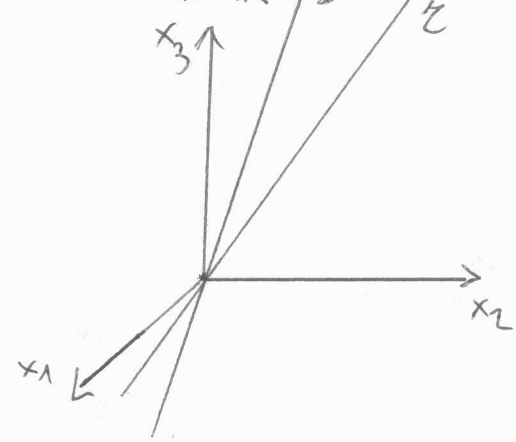


CONSIDERIAMO $U = s$ e $W = r$

$\Rightarrow$ SE $v_1 \in r$ e $v_2 \in s$,

$\Rightarrow v_1 + v_2 \notin s \cup r$

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^3$



$s + r =$ piano da esse generato

Chiamiamo <u>SOMMA</u> dei sottospazi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ il più piccolo sottospazio di $\mathcal{V}$ che contiene la loro unione:

DEFINIZIONE:

$$\boxed{\mathcal{U}+\mathcal{W}=\{v\in\mathcal{V} \mid \exists\, u\in\mathcal{U} \text{ e } w\in\mathcal{W} \text{ con } v=u+w\}}$$

Se $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{0\} \Rightarrow \mathcal{U}+\mathcal{W}$ é <u>SOMMA DIRETTA</u> di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ e si indica

$\underline{\mathcal{U}\oplus\mathcal{W}}$

TEOREMA DI GRASSMANN

Sia $\mathcal{V}$ spazio vettoriale n-dimensionale e $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ suoi sottospazi con $\overbrace{\dim\mathcal{U}\leq n}^{\dim\mathcal{U}=p,}$ e $\dim\mathcal{W}=q$, $q\leq n$.

Considero $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{v\in\mathcal{V} \mid v\in\mathcal{U} \text{ e } v\in\mathcal{W}\}$, é sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$;

e considero il sottospazio somma $\mathcal{U}+\mathcal{W} \Rightarrow \dim\mathcal{U}+\dim\mathcal{W}=$
$=\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W})+\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})$.

<u>Dimostrazione</u>:

Sia $\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})=k \Rightarrow B_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}=\{v_1,\dots,v_k\}$; completiamo $B_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}$ ad una base di $\mathcal{U}$, $B_{\mathcal{U}}=\{v_1,\dots,v_k, u_1,\dots,u_{p-k}\}$ e completo $B_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}}$ ad una base di $\mathcal{W}$, $B_{\mathcal{W}}=\{v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_{q-k}\}$.

Sia ora $v\in\mathcal{U}+\mathcal{W} \Rightarrow v=u+w=a_1v_1+\dots+a_kv_k+b_1u_1+\dots+b_{p-k}u_{p-k}+$
$+c_1v_1+\dots+c_kv_k+d_1w_1+\dots+d_{q-k}w_{q-k}=(a_1+c_1)v_1+\dots+(a_k+c_k)v_k+b_1u_1+\dots+$
$+d_{q-k}w_{q-k} \Rightarrow \mathcal{U}+\mathcal{W}=\langle\langle v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_{p-k},w_1,\dots,w_{q-k}\rangle\rangle$

quanti sono i vettori? $k+p-k+q-k=p+q-k$.

Considero $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_kv_k+\beta_1u_1+\dots+\beta_{p-k}u_{p-k}+\dots+\gamma_1w_1+\dots+\gamma_{q-k}w_{q-k}=0$

$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\beta_{p-k}u_{p-k}}_{\in\mathcal{U}}=\underbrace{\gamma_1w_1-\dots-\gamma_{q-k}w_{q-k}}_{\in\mathcal{W}} \Rightarrow$ tale vettore sta in

$\mathcal{U}\cap\mathcal{W} \Rightarrow -\gamma_1w_1-\gamma_2w_2-\dots-\gamma_{q-k}w_{q-k}=\delta_1v_1+\delta_2v_2+\dots+\delta_kv_k$

$$\Rightarrow \quad 0 = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_{q-k} w_{q-k} + \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \dots + \delta_k v_k$$

$\Rightarrow \gamma_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q-k$ e $\delta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$ perché i vettori DELLA COMBINAZIONE LINEARE SOPRA UGUALE AL VETTORE NULLO costituiscono B_W

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-k} u_{p-k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \; \forall j = 1, \dots, k$ e $\beta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots p-k$ perché i vettori costituiscono $B_U \Rightarrow$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{p-k}, w_1, \dots, w_{q-k}\}$ è base di $U + W \Rightarrow \dim(U+W) =$

$= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. c.v.d.

Esempio

Dati π_1, π_2 piani per o di $\mathbb{R}^3$: può essere $\pi_1 \cap \pi_2 = \{0\}$?

$$\dim(\pi_1 + \pi_2) = \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim \pi_1} + \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim \pi_2} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{\dim(\pi_1 \cap \pi_2)}$$ E QUINDI $\dim(\pi_1 + \pi_2) = 4$

se $\pi_1 \cap \pi_2 = \{0\}$

assurdo perché $\pi_1 + \pi_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $\Rightarrow \dim(\pi_1 \cap \pi_2)$ deve essere almeno 1.

ESEMPIO 1)

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \quad : \pi$$

Piano in $\mathbb{R}^3$: DETERMINIAMO UNA BASE DI TALE SOTTOSPAZIO

$x_3 = 2x_1 + 3x_2$

x_3	x_1	x_2
2	1	0
3	0	1

$\rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Viceversa: SUPPONIAMO DI AVERE LA BASE E CERCHIAMO L'EQUAZIONE:

$$\Pi = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \Pi \text{ se } \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = 2a_1 + 3a_2 \end{cases}$$

equazione parametrica di Π

RICAVANDO I PARAMETRI a_1 E a_2 IN FUNZIONE DELLE VARIABILI E SOSTITUENDOLI NELLE EQUAZIONI SI HA: $\Rightarrow$

$$X_3 = 2X_1 + 3X_2$$

$\uparrow$

equazione cartesiana di Π

ESEMPIO 2)

$$r = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 2x_1 \end{cases}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA IMPONENDO CHE ABBIA SOLUZIONE E QUINDI $rg\,A = rg(A \mid B)$ PER ROUCHÉ-CAPELLI!

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 3 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 3 & x_3 \end{vmatrix} = x_3 - 3x_2 - 2x = 0$$

OPPURE, RIDUCENDO LA MATRICE ALLA FORMA A GRADINI CANONICA

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & -3 & x_3 \end{array}\right) \overset{2R_1 - R_3 = R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & -3 & 2x_1 - x_3 \end{pmatrix} \overset{3R_2 + R_3 = R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 3x_2 + 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ HA SOLUZIONE $\Leftrightarrow$ $3x_2 + 2x_1 - x_3 = 0$