Siano V e W due spazi vettoriali e $L: V \to W$ applicazione lineare

1) L manda vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmenti di W se L è iniettiva. ($\mathrm{Ker}\, L = \{0\}$).

DIMOSTRAZIONE

Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ linearmente indipendenti e $w_j = L(v_j)$ $j = 1, \dots, k$

poniamo $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_k w_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 (L(v_2) + \dots + \alpha_k L(v_k) = 0$

$\Rightarrow L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0 \Rightarrow$ essendo $\mathrm{Ker}\, L = \{0\} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \Rightarrow w_1, \dots w_k$ sono linearmente indipendenti

2) Sia $n = \dim V$ e $v_1, \dots, v_n$ base di $V \Rightarrow$ scelti $w_1 \dots w_n \in W \Rightarrow$ posso sempre costruire un'applicazione lineare che mappa i v_j in w_j $\forall j = 1, \dots, n$

DIMOSTRAZIONE

lo scrivo come combinazione dei vettori della base

Sia $v \in V \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Rightarrow$ mappo v in $\sum_{j=1}^{n} a_j w_j \in W \Rightarrow L: V \to W$

$v \mapsto \sum a_j w_j$ è $L(v)$.

$\hookrightarrow L(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j$

Esempio:

$$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \mapsto (x, x+y, x-y)$$

se v_2 è un multiplo di v_1 anche la sua immagine deve essere un multiplo di $L(v_1)$

Siano v_1 e $v_2 \in V \mid v_2 = \alpha v_1 \Rightarrow L(v_2) = L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1)$

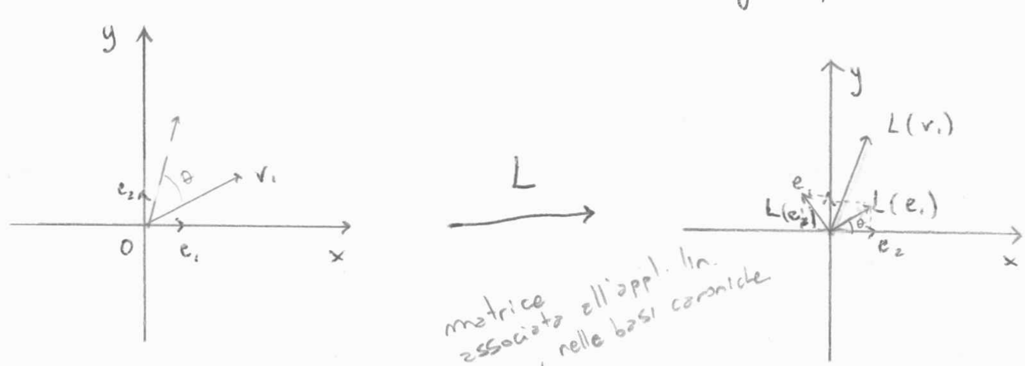
$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L\left((2,2)^T\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cerco $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ NON ESISTE!!

Esercizio:

Cerco $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che sia una rotazione di angolo θ con $0 \le \theta \le \pi$, in verso antiorario.

Fissiamo la base canonica in entrambi gli spazi $C = \{e_1, e_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$



matrice associata all'appl. lin. nelle basi canoniche

matrice delle coordinate dell'immagine nella base canonica

$L(e_1) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$

$L(e_2) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$

$$\Rightarrow [L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

matrice associata a v nella base canonica

$\Rightarrow$

Nel dominio considero un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ e pongo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{E}} \Rightarrow$ cerco $[L(v)]_{\mathcal{E}}$

$$[L(v)]_e = [L]_e^e \cdot [v]_e$$

Nel caso di prima, per la rotazione ottengo:

$$[L(v)]_e = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$$

Quindi l'applicazione che cercavamo è:

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (\cos\theta x - \sin\theta y,\ \sin\theta x + \cos\theta y)$$

GENERALIZZANDO... → intende lo spazio vettoriale V con Base B_V

Sia $L : (V, B_V) \longrightarrow (W, B_W)$ — idem.

L'applicazione comunque va da V in W perché è data insiemisticamente. B_V e B_W sono le basi dei due spazi V e W.

preso $v \in V$ si ha $[L(v)]_{B_W} = [L]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V}$

Dati V, W spazi vettoriali e $L : V \longrightarrow W$ applicazione lineare, fissate le basi negli spazi, ad L si associa una matrice $[L]_{B_V}^{B_W} \in \mathcal{M}_{(\dim W)\times(\dim V)}$

ha tante righe quant'è la dimensione del spazio codominio e tante colonne quant'è la dimensione del dominio.

Ho infinite matrici associate a L. Perché se cambio la base di V cambia anche la matrice.

Se do una matrice $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$ allora posso costruire un'applicazione $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $v \longmapsto L(v)$ posso dare $[L(v)]_{B_2} = A \cdot [v]_{B_1}$

$\mathbb{R}^n$ perché esiste sempre un'isomorfismo da uno spazio vettoriale a $\mathbb{R}^n$

È un'applicazione lineare?

$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$L(\alpha v) = \alpha L(v) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$

Nel prodotto matriciale vale la proprietà distributiva

$$[L(v_1 + v_2)]_{B_2} = A \cdot [v_1 + v_2]_{B_1} = \underbrace{A[v_1]_{B_1}}_{\text{è } [L(v_1)]_{B_2}} + \underbrace{A[v_2]_{B_1}}_{\text{è } [L(v_2)]_{B_2}} = [L(v_1)]_{B_2} + [L(v_2)]_{B_2}$$

$$[L(\alpha v)]_{B_2} = A \cdot [\alpha v]_{B_1} = \alpha A [v]_{B_1} = \alpha [L(v)]_{B_2}$$

OK È LINEARE

ESERCIZIO PER CASA:

Determinare come cambiano le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^2$ se ruotiamo la base di un angolo θ con $0 \leq \theta \leq \pi$ in verso antiorario.

(Il vettore rimane lo stesso ma ruota la base)

$\dim V = n$ $\quad$ $\dim W = p$

Dati V, W spazi vettoriali e fissate le basi B_V e B_W ⇒ ~~esiste~~ si ha un'altra applicazione

$$\{L : V \to W\} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$$
$$L \longmapsto [L]_{B_V}^{B_W}$$

insieme degli omomorfismi tra V e W si indica anche con: $\mathrm{Hom}(V, W)$

Si dimostra che ϕ è biettiva (da dimostrare)
inoltre ϕ è un morfismo di spazi vettoriali (è un'applicazione lineare).
di dimensione infinita) (DA DIMOSTRARE LA LINEARITÀ)
Se è biettiva è invertibile. $\exists\ \phi^{-1}$ ed essendo ϕ lineare anche ϕ^{-1} è lineare (DA DIMOSTRARE).
Tutto questo mi dice che ϕ è un isomorfismo tra spazi vettoriali.
Se cambio le basi ho un altro isomorfismo, l'applicazione cambia se cambio le basi.

$$\mathrm{Hom}(V, W) \xrightarrow{\phi} \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$$
$$L \longmapsto [L]^{B_W}_{B_V}$$
$$L : V \to W \xleftarrow[\phi^{-1}]{} A$$