MERCOLEDÌ 23/10/13

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO

$$\Sigma: \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 5 \\ 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma: \underset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

FORMA MATRICIALE DEL SISTEMA

$AX = B$

MATRICE COMPLETA ASSOCIATA AL SISTEMA Σ:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{3R_3 - R_1 = R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{array}\right) \overset{3R_2 - 2R_3 = R_3}{\sim}$$

a_{11} È IL PRIMO PIVOT

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

È STATA RAGGIUNTA LA FORMA A GRADINI, CON TRE PIVOT CON IL METODO DI GAUSS

IL RANGO DELLA MATRICE QUINDI, È DEL SISTEMA: HA RANGO TRE: PERCHÈ LA FORMA A GRADINI DI A HA 3 PIVOT

- RANGO $\Sigma = 3$

- UNA QUALUNQUE MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA Σ HA RANGO 3
- OSSERVAZIONE: IL RANGO DI UNA MATRICE NON VARIA PER EQUIVALENZA,

  CIOÈ PER OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA

- INDIVIDUATO IL RANGO DEL SISTEMA E DELLA MATRICE ASSOCIATA OPERO PER OTTENERE LA FORMA CANONICA DELLA MATRICE

RIPRENDENDO DALL'ULTIMA MATRICE DEL SISTEMA Σ:

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 13 \end{pmatrix} \underset{R_1+R_3=R_1}{\overset{3R_3-R_2=R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \vdots & 18 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 38 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 13 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}R_2 \to R_2}{\overset{\frac{1}{3}R_1 \to R_1}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -19 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 13 \end{pmatrix}$$

FORMA CANONICA DELLA MIA MATRICE, OTTENUTA ATTRAVERSO IL SISTEMA DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

$\Downarrow$ TORNANDO AL NUOVO SISTEMA ADESSO ASSOCIATO OTTENGO:

$$\Sigma' : \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -19 \\ x_3 = 13 \end{cases}$$

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA Σ, $Sol\,\Sigma$ È LA TERNA:

$$Sol\,\Sigma = \{(6, -19, 13)\}$$

- IL METODO UTILIZZATO FIN ORA FUNZIONA PER QUALSIASI SISTEMA LINEARE OMOGENEO O NON OMOGENEO.

- CONSIDERIAMO I SISTEMI LINEARI OMOGENEI

es:

$$\Sigma_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pm}x_m = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_0 : A \cdot X = 0$$

- A DIFFERENZA DI UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO, I SISTEMI LINEARI OMOGENEI HANNO <u>SEMPRE</u> "ALMENO" UNA SOLUZIONE, LA <u>SOLUZIONE NULLA</u> CIOÈ $0 = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{m}$.

- SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA SOLUZIONE NON NULLA DI Σ_0:
$\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, CON IL SIMBOLO $\sim$ SOPRA LE VARIABILI INDICHIAMO VARIABILI FISSATE E BEN DEFINITE

$\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \Rightarrow k\hat{x} = (k\hat{x}_1, \dots, k\hat{x}_m)$ CON $k \in \mathbb{R}$ È ANCORA UNA SOLUZIONE DI Σ_0

INFATTI:

$$\begin{cases} a_{11}k\hat{x}_1 + a_{12}k\hat{x}_2 + \dots + a_{1m}k\hat{x}_m = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}k\hat{x}_1 + \dots \qquad a_{pn}k\tilde{x}_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(a_{11}\hat{x}_1 + \dots + a_{1m}\hat{x}_m) = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot 0 = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

[· IN UNA MATRICE COMPLETA DI UN SISTEMA OMOGENEO, NON SCRIVO LA COLONNA DEI TERMINI NOTI (PRECEDENTE MATRICE 3) PERCHÈ TUTTI GLI ELEMENTI, OVVERO I TERMINI NOTI SONO UGUALI A ZERO E NON HA SENSO OPERARE CON ESSI. IN UN SISTEMA OMOGENEO, PERCIÒ, SI CONSIDERA SOLO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA]

- LE SOLUZIONI OTTENUTE SONO INFINITE, MA POSSONO ESSERE DI DIVERSO GRADO $\underbrace{R, \sigma, R^2\sigma, R^3\sigma \dots R^n}_{\text{CIOÈ POSSONO ESSERE TANTE QUANTI I PUNTI DI}}$
- REGOLA:

DATO UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI p EQUAZIONI IN m INCOGNITE DI RANGO r, $r \le p$, $\Rightarrow$ L'INSIEME DELLE SOLUZIONI SARÀ COSTITUITO DA ∞^{m-r} ELEMENTI, CIOÈ ∞ ELEVATO A $n-r$ CIOÈ

DELLE VARIABILI − RANGO Σ_0

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI È PIÙ DI UN SEMPLICE INSIEME PERCHÈ POSSIAMO OPERARE INTERNAMENTE CON OPERAZIONI

SE SOMMIAMO MATRICIALMENTE DUE SOLUZIONI DI Σ_0, $\hat{x}$ E $\bar{x}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{x} + \bar{x}$ È ANCORA SOLUZIONE DI $\Sigma_0 \Rightarrow$ L'INSIEME Sol Σ_0 È "PIÙ" DI UN INSIEME PERCHÈ È DOTATO DI UNA STRUTTURA ALGEBRICA

VOGLIAMO ANALIZZARE TALE STRUTTURA;

DEFINIZIONE: SI CHIAMA SPAZIO VETTORIALE SU UN CAMPO K, UN INSIEME V DOTATO DI DUE OPERAZIONI:
UNA BINARIA INTERNA: LA SOMMA "+"

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$$

RISPETTO ALLA QUALE $(V,+)$ È UN GRUPPO COMMUTATIVO. INOLTRE È DATA UNA OPERAZIONE DI "MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE":

$$\text{"}\circ\text{"} : K \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, v) \longmapsto \alpha v$$

CHE DEVE GODERE DELLE PROPRIETÀ:

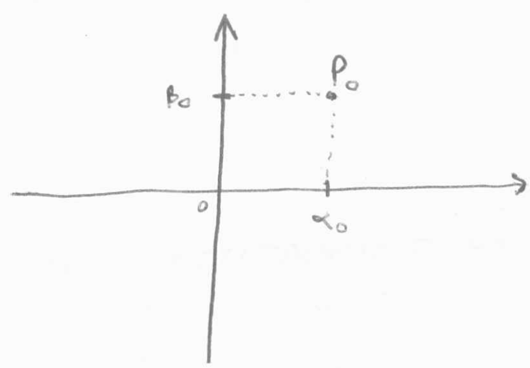
- $\exists$ ELEMENTO NEUTRO CHE SARÀ $\alpha = 1$ (CIOÈ L'ELEMENTO NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE IN K)

(*) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \quad \forall \alpha, \beta \in K$ e $v \in V$

(Δ) $\underbrace{\alpha(v_1+v_2)}_{①} = \underbrace{\alpha v_1 + \alpha v_2}_{②} \quad \forall \alpha \in K$ e $\forall v_1, v_2 \in V$

es: 1) $\mathbb{R}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE CON LE USUALI OPERAZIONI DI SOMMA E MOLTIPLICAZIONE

2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(α_0, β_0)



LA SOMMA IN $\mathbb{R}^2$ È COSÌ DEFINITA: $(x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1)$
E VERIFICA LE PROPRIETÀ DI GRUPPO;
ORA VERIFICHIAMO (*):

HO $v = (v_1, v_2) \Rightarrow \alpha(\beta v) = \alpha(\beta(v_1, v_2)) = \alpha(\beta v_1, \beta v_2) = (\alpha(\beta v_1), \alpha(\beta v_2)) =$
$= (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2)$

$(\alpha\beta)v = (\alpha\beta)(v_1, v_2) = ((\alpha\beta)v_1, (\alpha\beta)v_2) = (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2)$

VERIFICHIAMO (Δ)

PRENDO $\hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ e $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \Rightarrow \overset{①}{\alpha(\hat{v} + \bar{v})} = \alpha((\hat{v}_1, \hat{v}_2) + (\bar{v}_1, \bar{v}_2)) =$
$= \alpha(\hat{v}_1 + \bar{v}_1, \hat{v}_2 + \bar{v}_2) = (\alpha(\hat{v}_1 + \bar{v}_1), \alpha(\hat{v}_2 + \bar{v}_2)) =$
$= (\alpha\hat{v}_1 + \alpha\bar{v}_1, \alpha\hat{v}_2 + \alpha\bar{v}_2)$

② $\alpha\hat{v} + \alpha\bar{v} = \alpha(\hat{v}_1,\hat{v}_2) + \alpha(\bar{v}_1,\bar{v}_2) = (\alpha\hat{v}_1,\alpha\hat{v}_2) + (\alpha\bar{v}_1,\alpha\bar{v}_2) =$

$= (\alpha\hat{v}_1+\alpha\bar{v}_1 , \alpha\hat{v}_2+\alpha\bar{v}_2)$.

3) L'INSIEME DELLE MATRICI $\mathcal{M}^{(\mathbb{R})}_{p\times m}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE REALE

4) $\mathbb{R}[x] = \{p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0\}$;

Se $P_1(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ e $P_2(x) = b_k x^k + \dots + b_0 \Rightarrow (P_1+P_2)(x) = a_n x^n + \dots + a_0 + b_k x^k + \dots + b_0$

L'INSIEME DEI POLINOMI È UNO SPAZIO VETTORIALE CON LA SOMMA: $P_1(x)+P_2(x)$

E LA MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha p(x) = \alpha a_m x^m + \dots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$

5). $C^0_{[a,b]} = \{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ CONTINUA}\}$

INSIEME DELLE FUNZIONI CONTINUE

CON LA SOMMA $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ E LA MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$

È UNO SPAZIO VETTORIALE

6) $\mathbb{R}^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, È SPAZIO VETTORIALE (VERIFICARLO)

I SOTTO_SPAZI VETTORIALI SONO SOTTO INSIEMI DEGLI SPAZI VETTORIALI CON DETERMINATE PROPRIETÀ

DEFINIZIONE: DICIAMO SOTTOSPAZIO VETTORIALE W DI UNO SPAZIO VETTORIALE V, UN SOTTINSIEME DI V, CHIUSO RISPETTO ALLE OPERAZIONI DI V CIOÈ:

SE $w_1,w_2\in W \Longrightarrow w_1+w_2\in W$

E $\alpha w\in W$ $\forall\alpha\in K$ E $\forall w\in W$

E INOLTRE $0\in W$

- GLI ELEMENTI DI UNO SPAZIO VETTORIALE SONO DETTI VETTORI

ESEMPI:

- $\mathbb{R}$ È UN SOTTO SPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^2$
- IL DISCO $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^2$
- IN GENERALE TUTTE LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE SOTTO SPAZI VETTORIALI
- IL PUNTO DI ORIGINE DEGLI ASSI CARTESIANI È UN SOTTO SPAZIO VETTORIALE
- $\mathbb{R}^2$ È UN SOTTO SPAZIO VETTORIALE DI SE STESSO.

- I SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ SONO
  - IL VETTORE NULLO $0 = (0, 0, \dots, 0)$;
  - LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE;
  - I PIANI PASSANTI PER L'ORIGINE;
  - $\mathbb{R}^3$ STESSO.

IL VETTORE NULLO E LO SPAZIO STESSO SONO <u>SEMPRE</u>, BANALMENTE, SOTTOSPAZI VETTORIALI DI OGNI SPAZIO VETTORIALE, E PER QUESTO SONO DETTI <u>SOTTOSPAZI BANALI</u>