21/5/2014 ①

Studiare e classificare la seguente conica.

$$\underbrace{x^2-4xy-2y^2}_{\text{parte quadratica}}\underbrace{-3x-3y}_{\text{parte lineare}}+5=0$$ Conica in $\mathbb{R}^2$

LA PARTE QUADRATICA RAPPRESENTA una forma quadratica. Scrivo in forma matriciale TUTTA L'EQUAZIONE

$$\Rightarrow (x,y)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(-3,-3)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+5=0$$

(MATRICE SIMMETRICA)

Diagonalizziamo ORTOGONALMENTE la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow$ trovo autovalori: $|A-\lambda I|=0$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-2-\lambda)-4=\lambda^2+\lambda-6 \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\begin{matrix}\nearrow -3\\ \searrow 2\end{matrix}$$

$\Rightarrow D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ - Trovo la nuova base rispetto alla quale la matrice è diagonale.

Cerco la nuova base di $\mathbb{R}^2$ e quindi la matrice ortogonale S tale che $D=S^TAS$

dagli autovalori trovo gli autovettori e quindi gli autospazi.

Autospazi: E_2 : $-x-2y=0 \Rightarrow x=-2y \Rightarrow \langle\langle\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\rangle\rangle$

E_{-3} : $4x-2y=0 \Rightarrow y=2x \rightarrow \langle\langle\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\rangle\rangle$. GLI AUTOVETTORI TROVATI sono ortogonali PERCHE' RIFERITI AD AUTOVALORI DIVERSI; LI NORMALIZZIAMO:

$$\Rightarrow \mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow S=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

S ci serve per fare il cambio di coordinate $\Rightarrow$ la parte quadratica nelle nuove coordinate è $2z^2-3t^2$. IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE E':

$$\begin{cases}x=-\frac{2}{\sqrt5}z+\frac{1}{\sqrt5}t\\ y=\frac{1}{\sqrt5}z+\frac{2}{\sqrt5}t\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}z\\ t\end{pmatrix} \Rightarrow$$

FACENDO IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$2z^2-3t^2+\frac{6}{\sqrt5}z-\frac{3}{\sqrt5}t-\frac{3}{\sqrt5}z-\frac{6}{\sqrt5}t+5=0 \Rightarrow 2z^2-3t^2+\frac{3}{\sqrt5}z-\frac{9}{\sqrt5}t+5=0$$

Geometricamente, ruoto gli assi del piano di un certo angolo α trovando una nuova base, sempre di vettori ortogonali (trasf. isometrica); OPPURE OPERO UNA SIMMETRIA RISPETTO AD UNA RETTA.

Ora traslo gli assi.

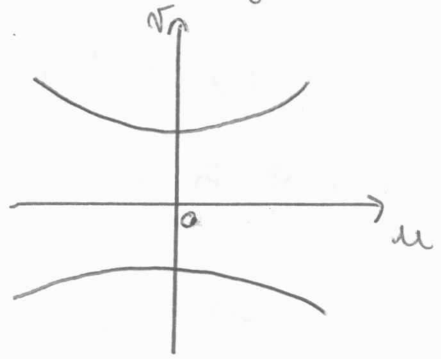
$$2\left(z^2+\frac{3}{2\sqrt5}z\right) = 2\left(z+\frac{3}{4\sqrt5}\right)^2 - 2\cdot\frac{9}{16\cdot 5}$$ ②

$$-3\left(t^2+\frac{3}{\sqrt5}t\right) = \cancel{-3\left(t+\frac{3}{2\sqrt5}\right)^2} + 3\cdot\frac{9}{100} = -3\left(t+\frac{3}{2\sqrt5}\right)^2 + 3\cdot\frac{9}{20}$$

⇒ faccio nuovo cambio di variabili che ci ~~[illegible]~~ la traslazione.

Pongo
$$\begin{cases} u = z+\frac{3}{4\sqrt5} \\ v = t+\frac{3}{2\sqrt5} \end{cases} \Rightarrow 2u^2-3v^2-\frac{9}{40}+\frac{27}{20}+5=0 \Rightarrow 2u^2-3v^2+\frac{49}{8}=0$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{-\frac{49}{16}}+\frac{v^2}{\frac{49}{48}}=1$$ r è una iperbole



Se voglio trovare questa curva nel vecchio sistema di riferimento, trovo l'origine del sistema u,v in coordinate x,y e poi trovo la rotazione E LA TRASLAZIONE INVERSA, TORNANDO AL SISTEMA x,y.

— — — — — —

Quadrica in $\mathbb{R}^3$. Classificare, studiare e disegnare.

$$\underbrace{3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3}_{\text{parte quadratica}}+2x_1-3x_3+1=0$$

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ -2 & 6 & -2\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(2,0,-3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+1=0$$

Di nuovo, diagonalizziamo come prima la matrice.

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda^3-12\lambda^2+21\lambda+98=0 \qquad \lambda_1=-2,\ \lambda_2=7,\ \lambda_3=7$$

$$D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix} \Rightarrow -2x^2+7y^2+7z^2$$ è elegnaz. della parte quadratica.

Cerco gli autospazi: L'AUTOSPAZIO RELATIVO A $\lambda=-2$ È

$$E_{-2}:\begin{cases}-2x_1+8x_2-2x_3=0\\ 5x_1-2x_2-4x_3=0\end{cases} \Rightarrow \left\langle\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle.$$ L'AUTOSPAZIO RELATIVO A $\lambda=7$ È

UN PIANO DI EQUAZIONE:

$$-4x_1-2x_2-4x_3=0 \Rightarrow 2x_1+x_2+2x_3=0 \Rightarrow x_2=-2x_1-2x_3 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

È UN VETTORE DI BASE DI TALE AUTOSPAZIO

Cerco un vettore $v_2 \perp$ a v_1 e giacente sul piano. $\Rightarrow$

$(x_1, -2x_1-2x_3, x_3)\cdot(0,-2,1)=0$

$4x_1+4x_3+x_3=0 \quad 4x_1=-5x_3 \Rightarrow \quad v_2=\begin{pmatrix}-5\\2\\4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\perp m}=\left\{\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2/\sqrt5\\1/\sqrt5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5/\sqrt{45}\\2/\sqrt{45}\\4/\sqrt{45}\end{pmatrix}\right\} \quad \Rightarrow S=\begin{pmatrix}2/3 & 0 & -5/\sqrt{45}\\1/3 & -2/\sqrt5 & 4/\sqrt{45}\\2/3 & 1/\sqrt5 & 4/\sqrt{45}\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3}x-\frac{5}{\sqrt{45}}z \\ x_2=\frac{1}{3}x-\frac{2}{\sqrt5}y+\frac{2}{\sqrt{45}}z \\ x_3=\frac{2}{3}x+\frac{1}{\sqrt5}y+\frac{4}{\sqrt{45}}z \end{cases} \Rightarrow -2x^2+7y^2+7z^2+\frac{4}{3}x-\frac{10}{\sqrt{45}}z-\frac{4}{3}x-\frac{2}{\sqrt5}y-\frac{16}{\sqrt{45}}z+1=0$$

$$\Rightarrow -2x^2+7y^2+7z^2-\frac{2}{\sqrt5}y-\frac{26}{\sqrt{45}}z+1=0$$

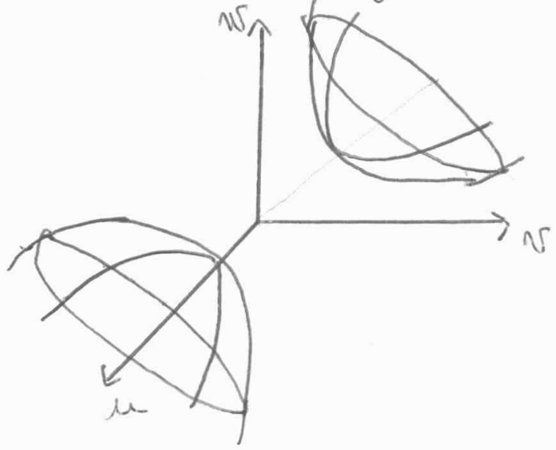
$\Rightarrow 7\left(y^2-\frac{2}{7\sqrt5}y\right)=7\left(y-\frac{1}{7\sqrt5}\right)^2-\frac{7}{7^2 5}$

$7\left(z^2-\frac{26}{7\sqrt{45}}z\right)=7\left(z-\frac{13}{7\sqrt{45}}\right)^2-7\cdot\frac{13^2}{7^2\cdot 45}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=x \\ v=y-\frac{1}{7\sqrt5} \\ w=z-\frac{13}{7\sqrt{45}} \end{cases}$$

$\Rightarrow -2u^2+7v^2+7w^2-\frac{1}{35}-\frac{13^2}{7\cdot45}+1=0 \quad \Rightarrow -2u^2+7v^2+7w^2=-\frac{137}{315}$

$\rightarrow$ arriviamo a una forma del tipo: $\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}-\frac{w^2}{c^2}=1$ IPERBOLOIDE A DUE FALDE



$$\begin{cases} w=0 \\ \frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}=1 \end{cases}$$