Esempio

Sia $V = \mathbb{R}[x]_2 = \{$polinomi in 1a variabile di grado $\leq 2\}$ è uno spazio vettoriale di (CUI CERCHIAMO) dimensione $= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} := \mathbb{R}[x]_2$: SI VEDE DUNQUE BANALMENTE CHE $\{1, x, x^2\}$ è un insieme di generatori; sono linearmente indipendenti:

$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$ che si verifica solo se $b_0, b_1, b_2 = 0$ infatti a destra ho un grado 0, quindi a sinistra dovranno annullarsi i termini di grado 1 e 2 ($b_1 = b_2 = 0$). Rimane quindi $b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = b_1 = b_2 = 0$.

$\Rightarrow \{1, x, x^2\}$ È BASE DI $\mathbb{R}[x]_2$.

La dimensione del nostro spazio vettoriale è quindi $\dim V = 3$.

Considero V^* e i seguenti funzionali (o forme) lineari:

$$\phi_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx \ ; \quad \phi_2(p(x)) = p'(1) \quad e \quad \phi_3(p(x)) = p(0) \quad \text{con } p(x) \in V$$

1) Dimostrare che $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ è base di V^*.

2) Trovare la base duale di $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, base di V

1) Sappiamo già dalla Teoria che $\dim V^* = 3$, basta dimostrare che i vettori dati sono linearmente indipendenti (da fare)

Appartengono a V^*? $\phi_1 : V \to \mathbb{R}$, $p(x) \mapsto \int_0^1 p(x)\,dx$ è lineare (linearità integrale) e così per ϕ_2 e ϕ_3

2) Cerco una base $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$. (Torno in V perché il duale del duale è identificabile a V in quanto isomorfo in modo canonico) $V^{**} = V \Rightarrow$ cerco base di $V \Rightarrow$

cerco
$$v_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
$$v_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$
$$v_3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Per definizione di base duale $\Rightarrow \phi_1(v_1) = \phi_1(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = 1$.

$$\begin{aligned} \phi_1(v_1) &= \int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = 1 \\ \phi_2(v_1) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)'\big|_{x=1} = 0 \\ \phi_3(v_1) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 1 \\ a_1 + 2a_2 x\big|_{x=1} = a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Cerco quindi $v_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad \begin{array}{c} a_0 = \\ a_1 = \\ a_2 = \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = x - \frac{x^2}{2}$

Si prosegue ponendo $\phi_1(v_2) = 0$, $\phi_2(v_2) = 1$, $\phi_3(v_2) = 0$ e $\phi_1(v_3) = 0$, $\phi_2(v_3) = 0$ e $\phi_3(v_3) = 1$. Troviamo $v_2 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2$ e $v_3 = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2$

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale sul campo ~~$\mathbb{R}$~~ K qualunque.

$\Rightarrow$ si definisce **FORMA BILINEARE** su V un'applicazione $F: V \times V \to K$ che verifica le seguenti proprietà:

- $F((v_1+v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w)) \quad \forall v_1, v_2, w \in V$
- $F((\alpha v, w)) = \alpha F((v, w)) \quad \forall v, w \in V$ e $\alpha \in K$
- $F((v, w_1+w_2)) = F((v_1, w_1)) + F((v, w_2)) \quad \forall v_1, w_1, w_2 \in V$
- $F((v, \beta w)) = \beta F((v, w)) \quad \forall v, w \in V$ e $\beta \in K$.

Esempio: $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ è bilineare?

$F((x_1+x_2, y)) = (x_1+x_2)y$

$F((x_1, y)) + F((x_2, y)) = x_1 y + x_2 y = (x_1+x_2)y$

Allo stesso modo:

$F((\alpha x, y)) = (\alpha x)y = \alpha(xy) = \alpha F((x, y))$ e analogamente per la 2ª componente.

Quindi: Si!! è una forma bilineare.

Ma una forma bilineare è lineare? Non sempre.

Nell'esempio appena dato si può notare infatti come il polinomio xy sia di grado 2. QUINDI NON LINEARE.

Infatti $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ non è lineare:

$F(v_1+v_2) = F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) =$

$\stackrel{!}{=} F((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)$

$\stackrel{!}{=} x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

$\neq$

$F(v_1) + F(v_2) = F((x_1, y_1)) + F((x_2, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$

Sia B_V una base di V, $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow$

considero $v, w \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \Rightarrow$

$F((v, w)) = F((\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j)) = F((a_1 v_1, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j)) + \dots + F((a_n v_n, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j)) =$

$\stackrel{!}{=} F((a_1 v_1, b_1 v_1)) + \dots + F((a_1 v_1, b_n v_n)) + F((a_2 v_2, b_1 v_1)) + \dots + F((a_2 v_2, b_n v_n)) + \dots + F((a_n v_n, b_n v_n)) =$

$\stackrel{!}{=} a_1 b_1 F((v_1, v_1)) + a_1 b_2 F((v_1, v_2)) + \dots + a_1 b_n F((v_1, v_n)) + \dots + a_n b_n F((v_n, v_n))$

Posso quindi vedere queste $F((v_i, v_j))$ come le entrate di una matrice quadrata $n \times n$

$\downarrow$

Costruisco:

$$[F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & f((v_1,v_2)) & \dots & f((v_1,v_n)) \\ F((v_2,v_1)) & F((v_2,v_2)) & \dots & \\ \vdots & & & \\ F((v_n,v_1)) & \dots & & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix}_{n\times n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{1\times 1}{F((v,w))} = \underset{1\times n}{[v]_{B_V}^T} \cdot \underset{n\times n}{[F]_{B_V}} \, \underset{n\times 1}{[w]_{B_V}}$$ e ottengo la stessa cosa.

Abbiamo quindi associato una matrice ad una forma bilineare.

INOLTRE: ~~$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$~~

PER ESEMPIO: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$F((x,y)) = \alpha_{11} x_1 y_1 + \alpha_{12} x_1 y_2 + \dots + \alpha_{1n} x_1 y_n + \dots + \alpha_{nn} x_n y_n .$$

Deduciamo che le forme bilineari sono espresse da polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n$.

Nel nostro esempio $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \alpha_{11} x_1 y_1 + \alpha_{12} x_1 y_2 + \alpha_{21} x_2 y_1 + \alpha_{22} x_2 y_2 :$$ Per esempio PRENDO $\boxed{F((X,Y)) = x_1 y_1 + x_1 y_2}$

$\Longrightarrow$ Cerco $[F]_e = \begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ INFATTI ESSENDO $F((X,Y)) =$

$= x_1 y_1 + x_1 y_2$; $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$, $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$; $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$; $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

$$\Rightarrow F((x,y)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_1 y_2 \quad \checkmark$$

N.B: Avrò INFINITE matrici associate alla stessa forma bilineare a seconda della base scelta.

Esercizio: Trovare come cambia la matrice a seconda della base scelta (AIUTO: saranno matrici congruenti A congr $B \Rightarrow \exists\, S$ invertibile $\mid B = S^T A \cdot S$