18-12-2013

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2,\ x_2 + x_3,\ x_1 + x_3)$

STUDIAMO l'applicazione L.

L è lineare? $L(x+y) = L(x) + L(y)$ [MORFISMO additivo] con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ed $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

e $L(\alpha x) = \alpha L(x)$ $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$

(da verificare)

OPPURE POSSIAMO ASSERIRE CHE:

~~[illegible]~~ L è lineare perché le componenti dei vettori immagine sono espresse da polinomi lineari omogenei.

L è iniettiva? cioè $L(v) = 0 \iff v = 0$ o equivalentemente $\ker L = \{0\}$.

Dobbiamo IMPORRE che $(x_1 - x_2,\ x_2 + x_3,\ x_1 + x_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow$ DOBBIAMO vedere quali sono le condizioni delle variabili affinché sia vera l'uguaglianza, cioè RISOLVIAMO IL SISTEMA:

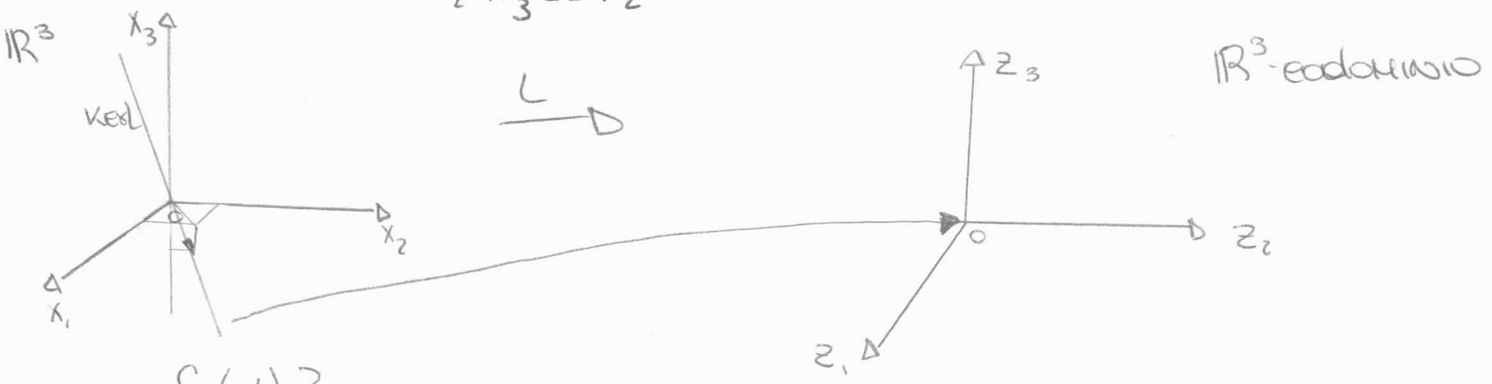
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

x_2-variabile LIBERA $\Rightarrow \ker L \leqslant \mathbb{R}^3$

sono equazioni del nucleo

il rango del sistema è due

$\ker L = Sol(\Sigma_0) \Rightarrow$ dimensione di $\ker L = 1$ e l'equazione cartesiana della retta è $\ker L = \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$



$B_{\ker L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

<u>NON</u> è iniettiva! PERCHÈ $\ker L \neq \{0\}$.

È suriettiva? per il teorema delle dimensioni:

$$\underset{1}{\dim \ker L} + \dim \operatorname{Im} L = \underset{3}{\dim V} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} L = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} L$ è un piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$

L'immagine è costituita dai vettori $(z_1, z_2, z_3) = (x_1 - x_2,\ x_2 + x_3,\ x_1 + x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ il vettore sta nell'immagine $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ il sistema è $\begin{cases} z_1 = x_1 - x_2 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ scriviamo una matrice completa associata al sistema

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & 1 & z_2 \\ 1 & 0 & 1 & z_3 \end{array}\right)$$

il rango della matrice incompleta deve essere lo stesso della matrice completa, solo così il sistema sarà compatibile e quindi il sistema sarà risolubile.

Dobbiamo quindi imporre che il rango della matrice completa sia 2.
Si può procedere con il metodo di Gauss.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & 1 & z_2 \\ 1 & 0 & 1 & z_3 \end{array}\right) \overset{R_1 - R_3 = R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & 1 & z_2 \\ 0 & -1 & -1 & z_1 - z_3 \end{array}\right) \overset{R_2 + R_3 = R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 + z_1 - z_3 \end{array}\right)$$

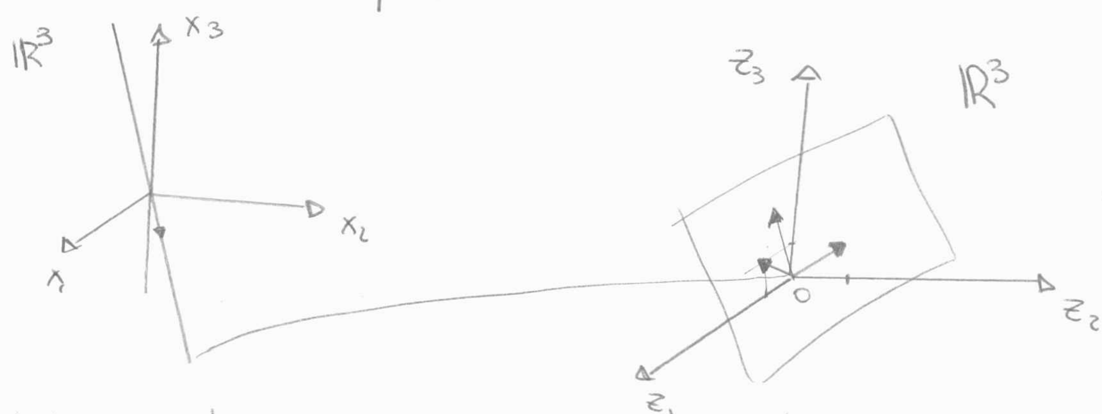
$\Rightarrow \boxed{z_1 + z_2 - z_3 = 0 = \mathrm{Im}\, L}$

Risolviamo il sistema di una equazione

$z_3 = z_1 + z_2$

z_3	z_1	z_2
1	1	0
1	0	1

$\Rightarrow B_{\mathrm{Im}L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



manda lo spazio IR3 in un piano

il vettore nullo ha come controimmagine il nucleo

Consideriamo ora la matrice associata ad L.
Prima di tutto devo fissare le basi, ad esempio le basi canoniche.
Cerco una matrice associata ad L.
Fisso le <u>basi canoniche</u> e quindi cerco $[L]^{C_{\mathbb{R}^3}}_{C_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3}$

$L(1,0,0) = (1,0,1) \Rightarrow (1,0,1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 =$ (vettori della base canonica e_1, e_2, e_3)

immagine di (1,0,0)

$= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = (a_1, a_2, a_3) \leftarrow$ (I colonna della matrice)

le coordinate di questo vettore sono i coefficienti del vettore $L(1,0,0)$ espresso come combinazione lineare dei vettori di base del codominio

$L(0,1,0) = (-1,1,0) \Rightarrow$ seconda colonna della matrice

$\Rightarrow [L]^{C_{\mathbb{R}^3}}_{C_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L(0,0,1) = (0,1,1) \Rightarrow$ terza colonna della matrice il rango di questa matrice è 2, quindi ho 2 righe o colonne linearmente indipendenti

$L: V \to W$

$$L(v) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n) \Rightarrow$$

UN VETTORE GENERICO DELL'IMMAGINE SI SCRIVE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI IMMAGINE DEI VETTORI DI BASE DEL DOMINIO. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\,L = \langle\langle L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_n) \rangle\rangle \quad \text{con } B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

(GENERATORI DELL'IMMAGINE)

SE SCOPRO QUALI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI POSSO QUINDI DIRE QUALE È LA BASE DELL'IMMAGINE.

$\Rightarrow$ I VETTORI COLONNA LIN. INDIP. DI $[L]^{B_W}_{B_V}$ FORMANO UNA BASE DI $\mathrm{Im}\,L$.

$\Rightarrow$ La cardinalità della base DI ImL è data dal rango della matrice, la cardinalità ci dà LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO IMMAGINE!

Cambiamo ora la base (DEL DOMINIO e/o DEL CODOMINIO DELL'APPLICAZIONE) la matrice sarà diversa ma il rango dovrà essere lo stesso di quella precedente: mandare tutto $\mathbb{R}^3$ in un piano di $\mathbb{R}^3$ è una PROPRIETÀ INTRINSECA DELLA APPLICAZIONE E NON DIPENDE DALLE BASI SCELTE MA CAMBIERÀ SOLO LA SUA EQUAZIONE.!

$$L: \underset{\text{dominio}}{(\mathbb{R}^3, \mathcal{C})} \to \underset{\text{codominio}}{(\mathbb{R}^3, B)} \quad \text{con } B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}+1\\0\\-1\end{pmatrix}} \right\} \text{ è BASE di } \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

infatti $\begin{vmatrix} 1 & 0 & +1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 -1 = -2$

cerco $[L]^B_C$: $L(e_1) = L(1,0,0) = (1,0,1) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 =$

$$= a_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ -a_2 - a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Dobbiamo risolvere un sistema lineare non omogeneo

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ -a_2 - a_3 = 1 \end{cases}$$

con Gauss:

La prima parte del sistema non cambia mai

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

è il termine noto che cambia $\Rightarrow$ si possono risolvere 3 sistemi contemporaneamente trovando prima: $L(e_2) = \; = (-1, 1, 0) = \;\Rightarrow$

$L(e_3) = \; = (0, 1, 1) =$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1 - R_2 = R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2 - R_3 = R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 - R_3 = R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_2 = R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad [L]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ MATRICE ASSOCIATA AD L NELLE BASI DATE, CON UNA BASE DIVERSA DA QUELLA CANONICA.

TUTTE LE MATRICI ASSOCIATE AD L DEVONO AVERE LO STESSO RANGO, E NON SOLO.

PROPOSIZIONE

SIANO $L: V \to W$ E $T: W \to U$ DUE APPLICAZIONI LINEARI CON $\dim V = n$, $\dim W = p$ E $\dim U = q$.
FISSIAMO LE BASI B_V; B_W, E B_U E LE MATRICI $[L]^{B_W}_{B_V} \in \mathcal{M}_{p \times n}$ E $[T]^{B_U}_{B_W} \in \mathcal{M}_{q \times p}$ $\Rightarrow$
COMPONIAMO: $T \circ L : V \to U \Rightarrow T \circ L$ È LINEARE E $[T \circ L]^{B_U}_{B_V} = [T]^{B_U}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V}$, $[T \circ L]^{B_U}_{B_V} \in \mathcal{M}_{q \times n}$

(L'ORDINE È IMPORTANTE PERCHÉ IL PRODOTTO DI MATRICI NON È COMMUTATIVO.)
(DA DIMOSTRARE)