18/11/13

Massimo numero di colonne linearmente indipendenti. → RANGO COLONNA

Massimo numero di righe linearmente indipendenti → RANGO RIGA

<u>Proposizione</u>: Data una matrice $A \in M_{p \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ rango riga di A = rango colonna di A

DIM.: Sia r = rango colonna di A cioè il max # di colonne di A lin. indip. $\Rightarrow$ se A' è la forma canonica della matrice $\Rightarrow$ A' ha esattamente le stesse colonne lin. indip. che aveva A $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A' = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & * & * & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \cdots & & 0 & * & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & & 1 & * & * \\ \hline 0 & & & 0 & & & \cdots & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots \; i_r \end{array} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_r \\ R_{r+1} \\ \vdots \\ R_p \end{array}$$

$*$ = numeri

i → colonne canoniche

VOGLIO DIMOSTRARE CHE LE PRIME r RIGHE DI A' SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ Considero $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots + \alpha_r R_r = 0$ $\quad [R_i \in \mathbb{R}^n \; \forall i = 1, \ldots, n]$

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \\ 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i_2 \\ \\ \\ i_3 \\ \\ \\ i_r \end{array} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ i_3 \\ \\ \\ \end{array} + \ldots + \alpha_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ i_r \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ * \\ * \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ * \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$$

↳ Le righe $R_1, \ldots, R_r$ di A' sono lin. indip, dall'R_{r+1} all'R_p le righe sono nulle → rango riga di A' è r. Allora anche il rango riga di A è r cvd

PERCHE' GLI SPAZI RIGA DI A E DI A' COINCIDONO.

<u>Proposizione</u>: Sia data la matrice $A = M_{p \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ il rango $A = r \Leftrightarrow r$ è l'ordine massimo dei <u>minori</u> non nulli di A

→ Determinanti delle sottomatrici quadrate

Esempio.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

minore non nullo

$1 \leq r \leq 3$
↓
ho solo 3 righe

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Ordine massimo dei minori non nulli = 2

Per trovare le righe o colonne lin. indip. di una matrice basta prendere quelle in cui vive la sottomatrice presa per dimostrare l'ordine massimo dei minori non nulli.

Dimostrazione Se il $rg A = r \Rightarrow$ detta A' la matrice in forma canonica sappiamo che $rg A' = r$ e la matrice A' ha la forma soprascritta $\Rightarrow$ Considero la sottomatrice formata dalle prime r righe e dalle r colonne canoniche $\Rightarrow$ TALE SOTTOMATRICE È I_r E, il suo determinante è $\neq 0$ (ESSENDO = 1.)

$\Rightarrow \Rightarrow \exists$ un minore non nullo di A' di ordine r e tale ordine è il massimo possibile per i minori di A' non nulli PERCHÉ OGNI SOTTOMATRICE DI ORDINE MAGGIORE SI OTTIENE AGGIUNGENDO RIGHE NULLE.

Poiché per equivalenza si mantiene la lineare indipendenza e dipendenza fra righe e colonne della matrice $\Rightarrow$ la sottomatrice di A di ordine r corrispondente a quella trovata in A', fornisce il minore di ordine massimo non nullo di A

DIM. IMPLICAZIONE INVERSA "$\Leftarrow$"

Se r è l'ordine massimo di minori non nulli di A $\Rightarrow \exists$ r righe/colonne di A lin. indip. - Il fatto che r è l'ordine <u>massimo</u> di minori non nulli $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ogni altra riga o colonna di A è lin. dipendente.

c.v.d.

Dato un sistema lineare omogeneo Σ_0, $\underset{p\times n}{A}\underset{n\times 1}{X} = \underset{p\times 1}{0}$ con $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, lo spazio delle soluzioni di tale sistema, $Sol\,\Sigma_0$, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (spazio ambiente).

1) $\exists$ sempre il vettore nullo $\Rightarrow 0 \in Sol\,\Sigma_0$ come soluzione

2) Dimostriamo che dati v_1 e $v_2 \in Sol\,\Sigma_0$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in Sol\,\Sigma_0$

[ESERCIZIO PER CASA]

Sottospazi vettoriali sono sempre spazi soluzione di sistemi omogenei.

Cerchiamo una Base di $Sol\,\Sigma_0$ e sappiamo da quanti vettori è formata perché conosciamo la dimensione del sistema delle soluzioni:

$\dim Sol\,\Sigma_0 = n - rg\,\Sigma_0$

Esempio. $\dim Sol\,\Sigma_0 = 3 - 1 = 2$ → Piano in $\mathbb{R}^3$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ $\quad (2\ \ 3\ \ {-1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ → numero

(EQUAZIONE CARTESIANA DI UN PIANO)

variabile legata → variabili libere

Considero $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

x_1	x_2	x_3
$-3/2$	1	0
$1/2$	0	1

$(-3/2, 1, 0)$ e $(1/2, 0, 1)$ sono soluzioni

$\Rightarrow B_{Sol\Sigma_0} = \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Sol\,\Sigma_0 = \left\{ s\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } s,t \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3/2\, s + 1/2\, t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

È EQUAZIONE PARAMETRICA DI UN PIANO