TEOREMA DELLE DIMENSIONI: DATA $L: V \to W$ L LINEARE $\Rightarrow$

$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$

<u>PROPOSIZIONE</u> $L: V \to W$ LINEARE È INIETTIVA $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} L = \{0\}$

(VETTORE NULLO STA SEMPRE NEL NUCLEO)

<u>DIMOSTRAZIONE</u> "$\Rightarrow$"

PER IPOTESI L È INIETTIVA, CIOÈ $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE ESISTA $v \in V, v \neq 0$ TALE CHE $L(v) = 0$, MA SAPPIAMO CHE $L(0) = 0 \Rightarrow L(v) = L(0) \Rightarrow$ PER INIETTIVITÀ IMPLICA $v = 0$

"$\Leftarrow$" DATI $v_1, v_2 \in V$ SUPPONIAMO CHE $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow L(v_1) - L(v_2) = 0$

PER LINEARITÀ $\Rightarrow L(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow$

$v_1 = v_2$

c.v.d.

1) PUÒ ESISTERE UN'APPLICAZIONE LINEARE INIETTIVA $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

~~[illegible]~~ NO, PERCHÉ ~~HA~~ AVREBBE UNO SPAZIO IMMAGINE DI DIMENSIONE MAGGIORE ~~DEL~~ DI QUELLA DEL SUO CODOMINIO, DI CUI È SOTTOSPAZIO.

2) COME DEVONO ESSERE IL DOMINIO E IL CODOMINIO DI UN'APPLICAZIONE LINEARE ~~INIETTIVA~~ BIETTIVA? DEVONO AVERE LA STESSA DIMENSIONE

(PER ESSERE SURIETTIVA LA DIMENSIONE DELL'IMMAGINE DEVE COINCIDERE CON QUELLA DEL CODOMINIO; ESSENDO INIETTIVA $\dim \operatorname{Ker} L = 0$)

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI $\dim$ DOMINIO $= \dim$ IMMAGINE $= \dim$ CODOMINIO.

<u>DEFINIZIONE</u>: UN MORFISMO BIETTIVO È DETTO <u>ISOMORFISMO</u>

(A LIVELLO DI SPAZI VETTORIALI POSSIAMO AVERE ISOMORFISMI SOLO CON SPAZI DELLA STESSA DIMENSIONE)

<u>DEFINIZIONE</u>: UN MORFISMO SURIETTIVO È DETTO <u>EPIMORFISMO</u>

<u>DEFINIZIONE</u>: UN'APPLICAZIONE LINEARE TRA SPAZI DELLA STESSA DIMENSIONE È DETTA <u>OPERATORE</u>

CONSIDERO UNO SPAZIO VETTORIALE REALE n-DIMENSIONALE V E UNA BASE $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ => SE $v \in V$ => $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ CON $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ => POSSO DEFINIRE L'APPLICAZIONE φ:

$V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$v \longmapsto (a_1, a_2, \dots, a_n)$

QUESTA APPLICAZIONE È BEN DEFINITA UNA VOLTA TROVATA LA BASE PERCHÉ LA COMBINAZIONE LINEARE È UNICA (SI DIMOSTRA)

φ È ISOMORFISMO DI SPAZI VETTORIALI (NON CANONICO PERCHÉ NON È UNICO IN QUANTO DIPENDE DALLE BASI SCELTE)

1) φ È LINEARE $\quad \varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2) \quad \forall w_1, w_2 \in V$

$\varphi(\alpha w) = \alpha \varphi(w) \quad e \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

con w vettore qualunque in V

φ È BIETTIVA? (FAR VEDERE CHE È SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA)

VEDIAMO SE È INIETTIVA:

$\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} = \{v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \mid \varphi(v) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, \dots 0)\}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \text{APPLICAZIONE INIETTIVA}$$

VEDIAMO LA SURIETTIVITÀ:

PRESA LA n-UPLA $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ => $\exists\, v \in V$ tale che $\varphi(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$?

SI, BASTA PRENDERE $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

=> APPLICAZIONE SURIETTIVA.

(DA DIMOSTRARE!)

φ^{-1} È ANCORA LINEARE => φ È ISOMORFISMO $\qquad$ cvd

IL NOSTRO SPAZIO VETTORIALE (DI DIMENSIONE FINITA, n) V È $\mathbb{R}^n$, TRAMITE QUESTO ISOMORFISMO (NELLA NOSTRA ALGEBRA LINEARE)

DAL PUNTO DI VISTA INSIEMISTICO POSSIAMO PARTIRE DA UN QUALUNQUE INSIEME V n-DIMENSIONALE, MA TRAMITE φ POSSIAMO LAVORARE CON LE n-UPLE DI $\mathbb{R}^n$, INVECE CHE CON GLI ELEMENTI DI V.

OSSERVAZIONE

L'ISOMORFISMO NON È UNICO, NON È CANONICO PERCHÈ CAMBIANDO LA BASE DELLO SPAZIO V CAMBIA L'ISOMORFISMO FRA V E $\mathbb{R}^n$.

POSSO CREARE DIAGRAMMI DI QUESTO TIPO IN CUI $T = \varphi_2 \circ L \circ \varphi_1^{-1}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\varphi_2"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, bend left, "\varphi_1^{-1}"] \arrow[r, "T"'] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

È UN DIAGRAMMA COMMUTATIVO

Posso muovermi come voglio LUNGO IL DIAGRAMMA, ottenendo lo stesso elemento IMMAGINE, CONSIDERANDO COMPOSIZIONI DELLE APPLICAZIONI COMPONENTI

creo l'applicazione T perchè più comoda, lavoro solo con le n-uple ~~...~~ circuitando operazioni più difficili.

PROPOSIZIONE

UN'APPLICAZIONE LINEARE TRA SPAZI DELLA STESSA DIMENSIONE E CON LA STESSA BASE È DETTA OPERATORE.

SIA $L: V \to W$ lineare e $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE DI V E $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$ BASE DI W

CONSIDERO $v \in V \Rightarrow v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ E

$L(v) = L(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 L(v_1) + \dots + a_n L(v_n) =$

$= a_1 (b_{11} w_1 + b_{12} w_2 + \dots + b_{1k} w_k) + a_2 (b_{21} w_1 + \dots + b_{2k} w_k) + \dots +$

$+ a_n (b_{n1} w_1 + \dots + b_{nk} w_k) =$

$= (a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + \dots + a_n b_{n1}) w_1 + \dots + (a_1 b_{1k} + a_2 b_{2k} + \dots + a_n b_{nk}) w_k$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & & & \\ b_{1k} & b_{2k} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}_{k \times n} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + \dots + a_n b_{n1} \\ \vdots \end{pmatrix}_{k \times 1}$$

SONO LE COORDINATE DELL'IMMAGINE DEL VETTORE V ESPRESSE NELLA BASE B_W.

DATA $L: V \to W$ E FISSATE LE BASI B_V e B_W NEGLI SPAZI VETTORIALI => SI ASSOCIA AD L UNA MATRICE $[L]_{B_V}^{B_W} \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ COSÌ DEFINITA:

LE SUE COLONNE SONO COSTITUITE DALLE COMPONENTI DELLE IMMAGINI DEI VETTORI DI BASE DI V, ESPRESSE COME COMBINAZIONI LINEARI NELLA BASE DI W E SI HA

$$[L(v)]_{B_W} = [L]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V}$$

ESEMPIO:

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ CONSIDERO $B_V = B_W = C_{\mathbb{R}^2}$

$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 + x_2, -x_2)$

$$\Rightarrow [L]_{C_{\mathbb{R}^2}}^{C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{array}{cc} L(e_1) & L(e_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ MATRICE ASSOCIATA

$L(e_1) = L((1;0)) = \underset{\text{immagine}}{(1;0)} = 1e_1 + 0e_2$

(sempre dato nella base canonica)

$L(e_2) = L((0;1)) = (1;-1) = 1e_1 - 1e_2$

CERCO AD ESEMPIO: $L((2;3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dots$