DATA UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{R})$ POSSIAMO CONSIDERARE ALCUNI SPAZI VETTORIALI AD ESSA LEGATI:

1) LO SPAZIO RIGA (SPAZIO GENERATO DALLE P RIGHE DELLA MATRICE) $= \langle\langle R_1, R_2, \dots R_p \rangle\rangle$
(LO SPAZIO RIGA È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^m$)

COME CAMBIA LO SPAZIO RIGA AL VARIARE DI A PER EQUIVALENZA, CIOÈ MEDIANTE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA?

QUALE LEGAME UNISCE LO SPAZIO RIGA DI A E LO SPAZIO RIGA DI A' CON $A' \sim A$?

- ENTRAMBI SONO SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^m$. LA LORO DIMENSIONE È LA STESSA POICHÈ È UGUALE AL RANGO DI A, CHE NON CAMBIA PER EQUIVALENZA.
SI DIMOSTRA CHE:
- LO SPAZIO RIGA DI A COINCIDE CON LO SPAZIO RIGA DI A'.

1) SUPPONIAMO CHE A' SIA OTTENUTA DA A MEDIANTE LO SCAMBIO DI 2 RIGHE:

$\Rightarrow$ SPAZIO RIGA $A = \langle\langle R_1, \dots, R_i, R_{i+1}, \dots, R_j, \dots R_p \rangle\rangle$

E SPAZIO RIGA $A' = \langle\langle R_1, \dots, R_j, R_{i+1} \dots, R_i, \dots, R_p \rangle\rangle$

$\Rightarrow$ I DUE SPAZI COINCIDONO POICHÈ HANNO GLI STESSI GENERATORI.

2) SUPPONIAMO ORA CHE A' SIA OTTENUTA DA A MEDIANTE LA MOLTIPLICAZIONE DI UNA RIGA DI A PER UNO SCALARE:

SUPPONIAMO DI MOLTIPLICARE R_i PER $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow$ SPAZIO RIGA $A' = \langle\langle R_1, \dots, \alpha R_i, R_{i+1}, \dots, R_p \rangle\rangle$

DATI GLI INSIEMI A E B
$A = B$ SE $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

TH: SPAZIO RIGA $A' \subseteq$ SPAZIO RIGA DI A

DIMOSTRAZIONE:

È SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE TUTTI I GENERATORI DI SPAZIO RIGA DI A' ∈ SPAZIO-RIGA DI A, MA L'UNICO CAMBIATO È αR_i AL POSTO DI R_i

$\Rightarrow$ BASTA DIMOSTRARE CHE $\alpha R_i \in$ SPAZIO RIGA A; QUESTO È VERO PERCHÈ αR_i È MULTIPLO DI $R_i \in$ SPAZIO RIGA DI A

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE SPAZIO RIGA $A \subseteq$ SPAZIO RIGA A'.

3) SUPPONIAMO INFINE CHE
↳ UNA RIGA, R_i, DI A È SOSTITUITA CON LA COMBINAZIONE $\alpha_i R_i + \alpha_j R_j$

$\Rightarrow$ SPAZIO RIGA $A = \langle\langle R_1, \dots, R_i, \dots R_p \rangle\rangle$

E SPAZIO RIGA $A' = \langle\langle R_1, \dots, \alpha_i R_i + \alpha_j R_j, \dots R_p \rangle\rangle$ SONO UGUALI. $\alpha_i R_i + \alpha_j R_j$

COME NEL CASO ~~PREC~~ PRECEDENTE BASTA DIMOSTRARE CHE ~~R_i~~ ∈ SPAZIO RIGA A
(VERO PERCHÈ COMBINAZIONE LINEARE DI R_i ED R_j, ENTRAMBI GENERATORI DI SPAZIO RIGA A)

E CHE $R_i \in$ SPAZIO RIGA A' (VERO PERCHÈ $R_i = \frac{1}{\alpha_i}(R_i - \alpha_j R_j)$ CON R_i, R_j GENERATORI DI SPAZIO RIGA DI A'

(2) SPAZIO COLONNA DI $A = \langle\langle C_1, C_2, \dots, C_m \rangle\rangle \subseteq \mathbb{R}^p$

SAPPIAMO CHE LA DIM. SPAZIO COLONNA A = RGA (PERCIÒ) SE $A' \sim A \Rightarrow$ DIM. SPAZIO COLONNA A' = DIM. SPAZIO COLONNA A

MA:

SPAZIO COLONNA $A \neq$ SPAZIO COLONNA A' SE $A \sim A'$

FACCIAMO VEDERE CON UN CONTROESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 5/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

CONSIDERO

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 4 \\ 0 = 10 \\ 0 = 1 \end{cases}$$ ~~IMPOSSIBILE~~ IMPOSSIBILE

PERCIÒ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ NON APPARTIENE ALLO SPAZIO $\left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$

PROPOSIZIONE: 1) DATE DUE MATRICI EQUIVALENTI $A \sim A'$ SE $C^i(A)$ E $C^j(A)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI ALLORA $C^i(A')$ E $C^j(A')$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

2) SE UNA COLONNA DI A' È COMBINAZIONE LINEARE DI ALTRE COLONNE DI A', AD ESEMPIO:

$$C^k(A') = \alpha_1 C_1(A') + \dots + \alpha_{k-1} C^{k-1}(A') + \alpha_{k+1} C^{k+1}(A') + \dots + \alpha_m C^m(A')$$

$$\Longrightarrow C^k(A) = \alpha_1 C^1(A) + \dots + \alpha_{k-1} C^{k-1}(A) + \alpha_{k+1} C^{k+1}(A) + \dots + \alpha_m C^m(A)$$

DIMOSTRAZIONE PUNTO 1)

$$\underbrace{\lambda_1 C^i(A') + \lambda_2 C^j(A') = 0}_{\text{IPOTESI}} \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}_{\text{TESI}}$$

$$\lambda_1 C^i(A') + \lambda_2 C^j(A') = A' \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} =$$

INFATTI: $A X = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = X_1 C^1(A) + X_2 C^2(A) + \dots + X_m C^m(A)$

$$= 0 C^1(A') + 0 C^2(A') + \dots + \lambda_1 C^i(A') + 0 C^{i+1}(A') + \dots + \lambda_2 C^j(A') + \dots + 0 C^m(A')$$

IL SISTEMA ASSOCIATO È UN SISTEMA DI P EQUAZIONI IN N VARIABILI DI CUI $v=(0,\dots,0,\lambda_1,0,\dots,0,\lambda_2,0,\dots,0)$ È UNA ~~SOLUZ~~ SOLUZIONE $(v \in Sol\ \Sigma_0')$

$Sol\ \Sigma_0' = Sol\ \Sigma_0$ CON Σ_0 SISTEMA ASSOCIATO AD A

$\Rightarrow\ v \in Sol\ \Sigma_0$ CIOÈ $Av=0$ $\quad A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\lambda_1 C^i(A) + \lambda_2 C^j(A) = 0$$

ESSENDO $C^i(A)$ E $C^j(A)$ LINEARM. INDIP. PER IPOTESI

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

c.v.d.

ALLO STESSO MODO SI DIMOSTRA IL PUNTO 2) DELLA PROPOSIZIONE.