12.05.14

ABBIAMO STUDIATO UN OPERATORE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE VERIFICA $T(u) \cdot v = u \cdot T^{-1}(v)$ $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$

SE DATO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\exists$ $T^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE

① $T(u) \cdot v = u \cdot T^*(v)$ $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ T^* È DETTO

<u>AGGIUNTO</u> DI T.

SE A È LA MATRICE $A = [T]_{B_{\perp n}}$ $\Rightarrow$ QUAL È LA MATRICE $[T^*]_{B_{\perp n}} = B$? $\Rightarrow$ $[u]_{B_{\perp n}} = X$ e $[v]_{B_{\perp n}} = Y$

DALLA DEFINIZIONE DATA ① SI HA $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (AX)^T I Y = X^T A^T Y = X^T I (A^T Y) = X^T A^T Y = X^T B Y \Rightarrow [T^*]_{B_{\perp n}} = A^T = B$$

L'AGGIUNTA PER L'OP. ISOMETRICO (GIÀ STUDIATO) È L'INVERSA E LA MATRICE B È ORTOGONALE.

STUDIAMO UN OPERATORE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE $T(u) \cdot v = u \cdot T(v)$ $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$, CIOÈ UN OPERATORE IL CUI AGGIUNTO È SE STESSO, CIOÈ È AUTOAGGIUNTO.

IN QUESTO CASO $[T]_{B_{\perp n}}$ È SIMMETRICA (Perchè la matrice A associata in una base ortonormale è ~~simmetrica~~ TALE CHE $A = A^T$.

UN TALE OPERATORE È DETTO <u>SIMMETRICO</u>

PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI SIMMETRICI

a) SE $U < \mathbb{R}^n$ INVARIANTE PER T $\Rightarrow$ $U^\perp$ È INVARIANTE PER T

<u>Dim:</u> VOGLIO DIMOSTRARE CHE $\forall\, w \in U^\perp \Rightarrow T(w) \in U^\perp$ $\Rightarrow$ PRESO $u \in U \Rightarrow T(w) \cdot u = w \cdot T(u) = 0$ POICHÈ $T(u) \in U$ c.v.d.

2) SE λ È AUTOVALORE PER T SIMMETRICO $\Rightarrow$

λ È REALE

Dim: SIA λ_0 AUTOVALORE COMPLESSO DI T

E z_0 AUTOVETTORE COMPLESSO, CONSIDERANDO

T COME APPLICAZIONE $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \Rightarrow$

$T(z_0) = \lambda_0 z_0 \Rightarrow$ SIA $A = [T]_{B+n} \Rightarrow A z_0 = \lambda_0 z_0$

POSSO CONSIDERARE IL COMPLESSO CONIUGATO PERCHÈ SONO IN $\mathbb{C}^n$

$\overline{A z_0} = \overline{\lambda_0 z_0} \Rightarrow \overline{A z_0} = \overline{A}\,\overline{z_0} = A\,\overline{z_0} = \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0}$

SFRUTTO IL FATTO CHE IL MIO OPERATORE T SIA SIMMETRICO E APPLICO L'UGUAGLIANZA:

$T(u)\cdot v = u \cdot T(v) \Rightarrow (A z_0)^T \cdot \overline{z_0} = z_0^T \cdot A\overline{z_0}$

$\Downarrow$

PRENDENDO COME VETTORI $u = z_0$ E $v = \overline{z_0}$

$(A z_0)^T \cdot \overline{z_0} = z_0^T \cdot A \overline{z_0}$

$\parallel$

$(\lambda_0 z_0)^T \cdot \overline{z_0} = z_0^T \cdot \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0} \Rightarrow z_0^T \lambda_0 \overline{z_0} = z_0^T \overline{\lambda_0}\,\overline{z_0} \Rightarrow$

$\lambda_0 z_0^T \overline{z_0} - \overline{\lambda_0} z_0^T \overline{z_0} = 0 \Rightarrow (\lambda_0 - \overline{\lambda_0})\underbrace{(z_0^T \overline{z_0})}_{\text{NON PUÒ ESSERE 0 PERCHÈ } z_0 \text{ AUTOVETTORE}} = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 = \overline{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}$

3) AUTOVETTORI RELATIVI AD AUTOVALORI DIVERSI SONO ORTOGONALI

Dim: SIANO λ_1 e λ_2 AUTOVALORI RELATIVI AD UN OPERATORE SIMMETRICO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CON $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow$ PRENDO DUE AUTOVETTORI v_1 e v_2

TALI CHE $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ $\Rightarrow$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE $v_1 \cdot v_2 = 0$

SO CHE $T(v_1) \circ v_2 = v_1 \circ T(v_2) \Rightarrow (\lambda_1 v_1) \circ v_2 = v_1 \circ (\lambda_2 v_2) \Rightarrow$

$\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0$

$\Rightarrow$ ESSENDO $\lambda_1 \neq \lambda_2$ PER IPOTESI $\Rightarrow v_1 \circ v_2 = 0$ c.v.d.

TEOREMA DI STRUTTURA PER GLI OP. SIMMETRICI

DATO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO $\exists$ BASE ORTONORMALE $\mathcal{B}_{\perp_n}$ di $\mathbb{R}^n$ RISPETTO ALLA QUALE $[T]_{\mathcal{B}_{\perp n}}$

$$\begin{matrix} \| \\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

POSSIAMO INTERPRETARE IL TEOREMA COSÌ:

(OGNI MATRICE SIMMETRICA REALE
È ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE)

Dim: PER INDUZIONE SU n (DIM. SPAZIO EUCLIDEO)

u) Se $n = 1$ $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}} = \alpha$ (matrice diagonale)

u') Se $n = 2 \Rightarrow T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e preso una base $\tilde{\mathcal{B}}_{\perp n} \Rightarrow [T]_{\tilde{\mathcal{B}}_{\perp n}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ CONSIDERO $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0$

$\lambda^2-\lambda(a+c)+ac-b^2=0$

$$\lambda=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2}$$

$\Delta=a^2+c^2-2ac+4b^2 \Rightarrow (a-c)^2+(2b)^2>0$

SEMPRE A MENO CHE $a=c$ e $b=0$ $\Rightarrow$

⊛ SE $B=0$ e $a=c$, ABBIAMO $\lambda_1=\lambda_2=\frac{a+c}{2}$

$\Rightarrow \mu\left(\frac{a+c}{2}\right)=2 \Rightarrow$ CERCO L'AUTOSPAZIO

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

MA SE IMPONGO QUESTE CONDIZIONI ⊛ LA MATRICE È GIÀ IN PARTENZA DIAGONALE $=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

E QUINDI $B_{\perp n}=\tilde{B}_{\perp n}$

SE $\Delta>0 \Rightarrow$ GLI AUTOVALORI SONO DISTINTI QUINDI LA MATRICE È DIAGONALIZZABILE.

2) SUPPONIAMO LA PROPOSIZIONE VERA FINO ALLA DIM $=n$ E DIMOSTRIAMOLA PER $\mathbb{R}^{n+1}$

SIA λ_0 UN AUTOVALORE REALE DI T E u UN SUO AUTOVETTORE $\Rightarrow U=\langle\langle u\rangle\rangle$ È INVARIANTE PER $T \Rightarrow U^\perp$ È INVARIANTE PER T E DIM $U^\perp=n+1-1=n \Rightarrow$ SE CONSIDERO

LA RESTRIZIONE DI T: $T|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$

È ANCORA UN OPERATORE SIMMETRICO E PER IPOTESI INDUTTIVA $\exists\ \mathcal{B}'_{\perp n}$ di $U^\perp$ TALE CHE

$$[T|_{U^\perp}] = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

POICHÈ $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$ POSSO CONSIDERARE COME $\mathcal{B}_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^{n+1}$: LA BASE $\left\{\frac{u}{\|u\|}\right\} \cup \mathcal{B}'_{\perp n}$

VOGLIO CHE LA BASE SIA ORTONORMALE, LA CERCO COSÌ

E $[T]_{\mathcal{B}_{\perp n}} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & d_n \end{pmatrix}$ c.v.d.

— o — o — o — o

GEOMETRICAMENTE COSA RAPPRESENTANO GLI OPERATORI SIMMETRICI?

n) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \alpha x$

<u>OMOTETIE</u>
- DILATAZIONI se $\alpha > 1$
- CONTRAZIONI se $0 < \alpha < 1$
- RIBALTAMENTI se $\alpha < 0$ (O SIMMETRIE)

2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ CONSIDERO LA MATRICE IN FORMA CANONICA: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ SE CONSIDERO $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$

T È LA COMPOSIZIONE DI <u>OMOTETIE</u> LUNGO RETTE PERPENDICOLARI

3) ANCHE PER $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ L'OPERATORE SIMMETRICO È LA COMPOSIZIONE DI OMOTETIE LUNGO RETTE PERPENDICOLARI

<u>PROPOSIZIONE</u>: UNA MATRICE QUADRATA REALE È ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ È SIMMETRICA

Dim: "$\Leftarrow$" VERA PER IL TEOREMA DI STRUTTURA DEGLI OPERATORI SIMMETRICI

"$\Rightarrow$" SUPPONIAMO CHE A SIA ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow \exists$ D diag. e S INVERTIBILE ed ortogonale TALE CHE $D = S^{-1}AS \Rightarrow$

$A = SDS^{-1}$ (con S ortogonale) $= SDS^T$

$\Rightarrow A^T = (SDS^{-1})^T = (SDS^T)^T = SDS^T = A$

$\Rightarrow$ A SIMMETRICA