Il cambiamento di base in $\mathbb{R}^2$ si può estendere a un qualsiasi spazio vettoriale V n-dimensionale, ovvero si possono esprimere le coordinate di ogni vettore in una base fissata.

Se si cambia la base dello spazio V, passando da una base B_1 ad una base B_2, le coordinate del vettore ~~v~~ cambiano secondo la seguente formula: posto $[V]_{B_1} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e

$$[V]_{B_2} = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y = S_{B_1 B_2} X = S^{B_2}_{B_1} X}$$

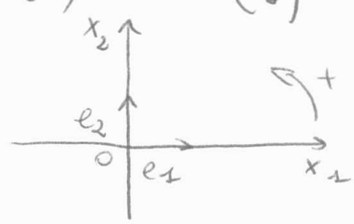
$S^{B_2}_{B_1}$ è una matrice $\in M_{n\times n}$ che ha per colonne le coordinate dei vettori della base B_1 espressi nella base B_2

$S^{B_2}_{B_1}$ è una matrice quadrata ed è SEMPRE invertibile poiché i vettori (COLONNA) sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ il rango è massimo $= n$

e $\left(S^{B_2}_{B_1}\right)^{-1} = S^{B_1}_{B_2}$; $S^{B_2}_{B_1}$ È DETTA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE.

Possiamo parlare di orientazione delle basi, cioè la scelta di un'ordine dei vettori che costituiscono tale base.

Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ dati i vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ do un'orientazione di $\mathbb{R}^2$ scegliendo l'ordine $\{e_1, e_2\}$



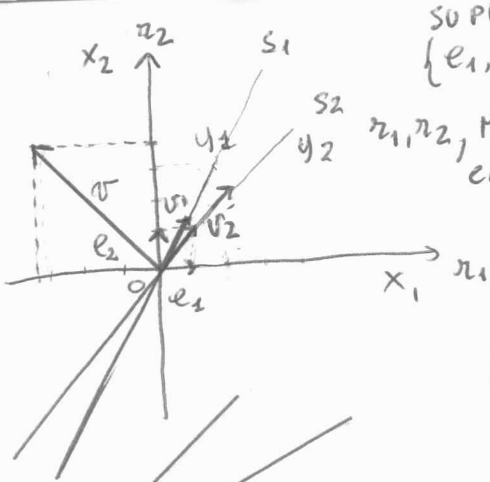
Si dice ordinazione positiva o destrorsa poiché per sovrapporre e_1 a e_2 bisogna eseguire una rotazione in senso ANTIORARIO.

La matrice del cambiamento di base $S^{B_2}_{B_1}$ mantiene la stessa orientazione (dello spazio vettoriale) se $\det S^{B_2}_{B_1} > 0$ mentre la cambia se $\det S^{B_2}_{B_1} < 0$.

Se CAMBIAMO BASE E CONSIDERIAMO $\{e_2, e_1\} = B$, scambiando e_1 ed e_2, nella matrice $S^{B_2}_{B_1}$ si scambiano due colonne E QUINDI IL DETERMINANTE CAMBIA SEGNO, E CAMBIA L'ORIENTAZIONE DELLO SPAZIO DI CONSEGUENZA.

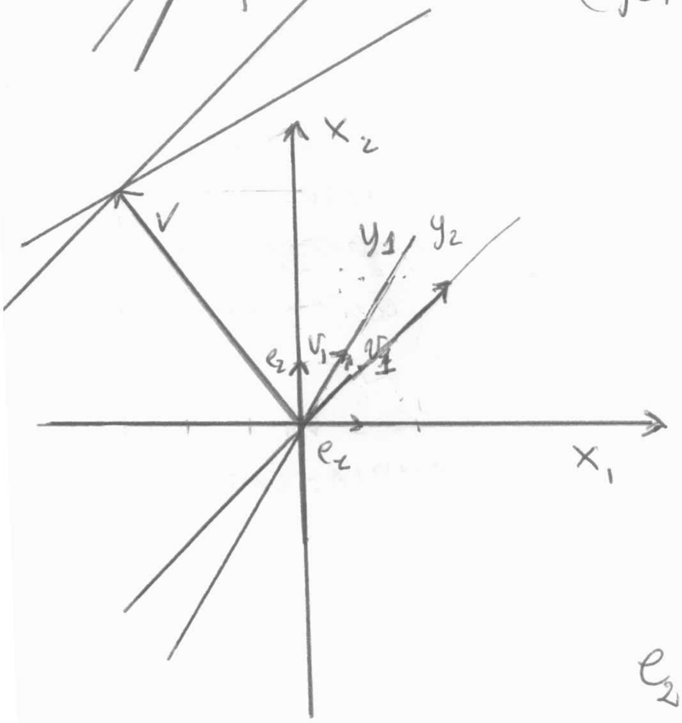
Esempio: DI CAMBIAMENTO DELLE COORDINATE.

Considero le basi $C_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ e $B \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\}$ e considero un vettore $[v]_{C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$



SUPPONIAMO x_1, x_2 LE COORDINATE NELLA BASE $\{e_1, e_2\}$ CHE DEFINISCE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO r_1, r_2, MENTRE S_1 e S_2 sono i nuovi assi di riferimento CON LE NUOVE COORDINATE y_1, y_2, DEFINITO DALLA BASE $\{v_1, v_2\}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S_e^B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \end{pmatrix}$$



$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = d_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_1 - R_2 = R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1 + 2R_2 = R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_{11} = 3 \\ d_2 = -1 \end{cases}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_{22} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1 - R_2 = R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{R_1 + 2R_2 = R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_{12} = -2 \\ d_{22} = +1 \end{cases}$$

PROPOSIZIONE: in uno spazio vettoriale V, n-dimensionale considero K vettori linearmente indipendenti $V_1, \dots V_K$, con $K < n \Rightarrow$ possiamo completare $\{V_1, \dots V_K\}$ ad una Base B V

Dimostrazione:

Consideriamo $W = \langle\langle V_1, \dots V_K \rangle\rangle$, sottospazio di V e dimensione K che non generano tutto $V \Rightarrow \exists\, V_{K+1} \in V$ ma $V_{K+1} \notin W$ non è combinazione lineare di $V_1, \dots V_K \Rightarrow \{V_1 \dots V_K, V_{K+1}\}$ è costituito da vettori linearmente indipendenti.

Considero $W_1 = \ll v_1 \dots v_{k+1} \gg$: se $W_1 \equiv V$ abbiamo finito altrimenti $\exists\, v_{k+2} \notin W_1 \Rightarrow v_1, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ Considero $W_2 = \ll v_1, \dots v_{k+2} \gg$ o $W_2 \equiv V$ oppure no..., e si prosegue fino ad arrivare a n vettori linearmente indipendenti Essendo $n = \dim V$ $\Rightarrow \ll v_1, \dots, v_n \gg = V$ c.v.D

Come trovare gli n-k vettori che ci servono?

1) Ad esempio aggiungendo ripetutamente vettori e provando LA LORO LINEARE INDIPENDENZA.

2) Formiamo una matrice A $n \times (n+k)$ avente per colonne i k vettori dati più gli n vettori di una base di V, ad esempio la canonica. A ha rango n PERCHÈ ci sono n colonne linearmente indipendenti k delle n colonne linearmente indipendenti sono le prime k colonne della matrice, cerco le altre n-k riducendo la matrice A a gradini con il metodo di Gauss ed individuando le colonne dei pivot.

Esempio

$\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_1 - R_3 = R_3}{\overset{R_1 - R_2 = R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_2 - R_3 = R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Le operazioni elementari riga cambiano i vettori colonne, pertanto i vettori finali sono diversi da quelli iniziali, e anche gli spazi da essi generati. Tuttavia si mantiene la lineare dipendenza e la lineare indipendenza.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IL QUARTO VETTORE COLONNA È DEFINITO DALLA STESSA combinazione lineare CHE in qualsiasi matrice iniziale ESPRIME IL QUARTO VETTORE COLONNA DI QUESTA MATRICE IN FORMA CANONICA COME COMBINAZIONE DEI PRIMI TRE