Proprietà polinomio caratteristico

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, allora $p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n$

se $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$.

Si può dimostrare che: $c_k = (-1)^{n-k} \sum$ minori d'ordine k di A (principali).

Questi coefficienti sono degli invarianti del polinomio cioè se sostituiamo la matrice A con un'altra matrice simile, i coefficienti del polinomio non cambiano.

In particolare $c_1 = (-1)^{n-1} \sum$ minori principali di ordine 1 di A, ovvero le entrate della diagonale principale. La somma degli elementi della diagonale principale è detta $\boxed{\text{traccia}}$ indicata con $tr(A)$.

$\Rightarrow \quad c_1 = (-1)^{n-k} \, tr(A)$

Si nota subito che la "traccia" è un invariante per similitudine.

$\Rightarrow \quad c_n = (-1)^0 \sum$ minori di A di ordine n $\Rightarrow c_n = \det A$

Quindi anche c_n è un invariante per similitudine. (COME GIÀ DIMOSTRATO)

Dipendenza fra gli invarianti di una matrice e l'applicazione lineare definita da questa

Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, ad essa è associato un operatore $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, fissata la base B in $\mathbb{R}^n$, allora $A = [T]_B^B$.

Cambiando base in $\mathbb{R}^n$, ovvero considerando B', allora esisterà una matrice $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tale che $B = [T]_{B'}^{B'}$.

Considero il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, B) \arrow[r, "A = {[T]_B^B}", "T"'] \arrow[d, "{[id]_B^{B'} = S^{-1}}", "id"', phantom] & (\mathbb{R}^n, B) \arrow[d, "id", "{[id]_B^{B'} = S^{-1}}"'] \\
(\mathbb{R}^n, B') \arrow[u, "id", "{S = [id]_{B'}^{B}}"'] \arrow[r, "B = {[T]_{B'}^{B'}}", "T"'] & (\mathbb{R}^n, B')
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \quad B = S^{-1} A \cdot S$: pertanto possiamo affermare che matrici associate allo stesso operatore in basi diverse sono simili e viceversa

Osservazione: ad ogni operatore è associata una classe di **EQUIVALENZA** di matrici simili

---

Consideriamo un operatore su uno spazio vettoriale n-dimensionale:

$$T : V \longrightarrow V$$

Definizione: un sottospazio $\mathcal{U}$ di V è detto invariante per T se $T(u) = \mathcal{U} \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$

Esempio: ① sia $id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ sono sottospazi invarianti:

- tutto $\mathbb{R}^3$ (banale);
- il vettore nullo (banale);

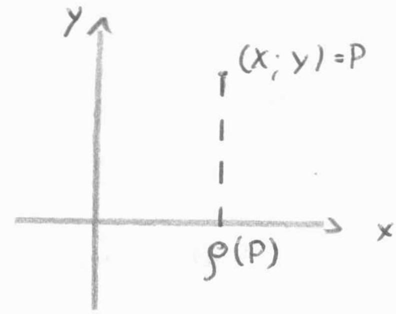
SONO SOTTOSPAZI INVARIANTI PER OGNI OPERATORE.

- totti i sottospazi vottoriali di $\mathbb{R}^3$ quali rette e piani.

② sia $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tale per cui $(x; y) \longmapsto (x; 0)$:

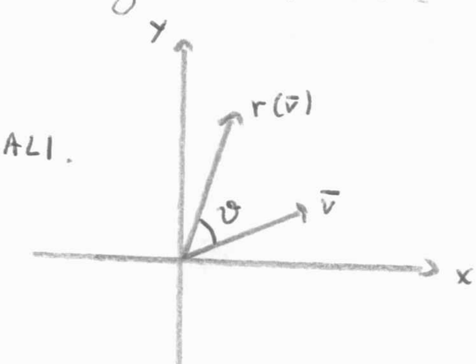
SONO SOTTOSPAZI INVARIANTI NON BANALI:

- l'asse x;
- l'asse y.



③ sia $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, una rotazione di angolo ϑ $(0 < \vartheta < \pi)$

- se $\vartheta \in]0, \pi[$, non ci sono sottospazi invarianti. NON BANALI.



Definizione: si chiama autovettore di un operatore $T: V \longrightarrow V$ un vettore v, non nullo, tale che esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ per il quale $T(v) = \lambda v$

Lo scalare λ prende il nome di autovalore relativo all'autovettore $v \in V$; $\{v \in V / T(v) = \lambda v\}$, fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, è detto autospazio relativo a λ.

PROPOSIZIONE:

1) L'autospazio relativo all'autovalore λ è un sottospazio di V.

Dimostrazione ①

Indichiamo l'autospazio di V: E_λ.

E_λ ha infiniti vettori se ne abbiamo trovato uno: $\overbrace{\text{se } v \text{ è autovettore}}^{\text{INFATTI:}}$ relativo a λ, cioè se $T(v) = \lambda v$, allora $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \lambda v$

=> detto questo, sappiamo che E_λ è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare!

Siano $v_1, v_2 \in E_\lambda \Rightarrow v_1 + v_2 \in E_\lambda$?

$T(v_1) = \lambda v_1$ e $T(v_2) = \lambda v_2$

$\Rightarrow T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$

$\Rightarrow E_\lambda$ è sottospazio vettoriale di V.

Osservazione: ad ogni autovalore corrispondono infiniti autovettori, COME ABBIAMO APPENA DIMOSTRATO.

Ad ogni autovettore corrisponde un unico autovalore.

Dimostrazione: supponiamo che $\exists\ \lambda_1, \lambda_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow T(v) = \lambda_1 v$ e $T(v) = \lambda_2 v$ dove v è l'autovettore considerato.

$\Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$ ma $v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Proposizione: autovettori che corrispondono ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti. (ESERCIZIO)

Osservazione: gli autospazi di un operatore T sono sottospazi invarianti per T; il viceversa non è sempre vero! (dare un controesempio).

Determinare gli autospazi di $T: V \longrightarrow V$

Cerco i vettori $v \in V$ ($v \neq 0$) tali che $T(v) = \lambda v \Rightarrow T(v) - \lambda v = 0$

$\circ$ $T(v) - \lambda id(v) = 0 \Rightarrow (T - \lambda\, id)(v) = 0$

CERCO

$\Rightarrow$ $v \in \ker(T - \lambda\, id)$, CON $v \neq 0$

Fisso una base nello spazio vettoriale V e considero $(T-\lambda id) : (\mathbb{R}^n, B) \to (\mathbb{R}^n, B)$ dove B è la base scelta.

$$\Rightarrow [T - \lambda\, id]_B^B = [T]_B^B - \lambda [id]_B^B = [T]_B^B - \lambda I$$

Cerco lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo avente per matrice dei coefficienti: $[T]_B^B - \lambda I$, e voglio che in tale spazio ci siano vettori non nulli, per questo impongo alla matrice di non avere rango massimo, cioè, essendo LA MATRICE IN $M_{n \times n}$, al determinante di essere nullo. $|[T]_B^B - \lambda I|$ È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DELLA MATRICE $[T]_B^B$

$|[T]_B^B - \lambda I| = 0 \Rightarrow$ cerco le radici caratteristiche che saranno gli autovalori di T!

$\Rightarrow$ detto λ_0 uno di tali autovalori, lo sostituisco nella matrice ottenendo $[T]_B^B - \lambda_0 I$ e risolvo il sistema omogeneo ad esso associato trovando gli autospazi.

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice associata a $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x; y) \longmapsto (x+2y ; 3x+4y)$

$\Rightarrow [T]_B^B - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda I \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda(4-\lambda) - 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

Considero, ora, la matrice $A - \lambda_{1,2} I$:

$$\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \dfrac{1 - 5 - \sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \dfrac{3-\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$$

Autospazio: $\begin{pmatrix} \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \dfrac{3-\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2} x + 2y = 0 : E_{\lambda_1}$