09/04/14 GEOMETRIA

LAVORIAMO IN UNO SPAZIO EUCLIDEO CHE SI OTTIENE NEL MODO SEGUENTE

In uno spazio vettoriale reale abbiamo introdotto una forma bilineare simmetrica definita positiva. $F: V \times V \to \mathbb{R} \Rightarrow$ sia $Q: V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica tale che $Q(v) = F(v,v)$

Definiamo <u>NORMA</u> di un vettore v e la indico con $\|v\| = |v| = \sqrt{Q(v)} = \sqrt{F(v,v)}$

Ad esempio se F è il prodotto scalare standard fra due vettori X e Y, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$X \cdot Y = (X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow Q(X) = F(X,X) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\|X\| = |X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

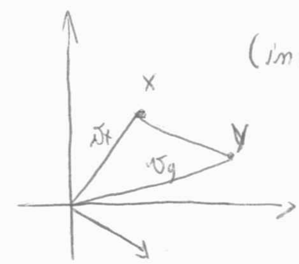
Presi i punti $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ed $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$, definisco $d(X,Y) = \|v_y - v_x\|$

con il prodotto scalare standard:

$$d(X,Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

(è la stessa formula della distanza tra due punti)

(in $\mathbb{R}^2$)



ESEMPIO:

In $\mathbb{R}^4$ diamo la seguente forma quadratica:

$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c x_4^2 \quad c > 0$ (perciò non definita positiva)

Questa forma quadratica in particolare è detta forma quadratica di MINKOWSKI, c è la velocità della luce ed $\mathbb{R}^4$ è lo spazio-tempo della relatività ristretta. La geometria di questo spazio non è quella ordinaria, non euclidea.

I vettori v di $\mathbb{R}^4$ per i quali $Q(v) > 0$ sono detti vettori spazio, i vettori v per i quali $Q(v) < 0$ sono vettori tempo e quelli per cui $Q(v) = 0$ sono vettori luce.

TORNIAMO NEGLI SPAZI EUCLIDEI:

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Dati due vettori X e Y in uno spazio euclideo $\Rightarrow |X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|$

Dimostrazione. I caso) Supponiamo che X e Y siano lin. dipendenti: $Y = \alpha X$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|X \cdot \alpha X| = |\alpha (X \cdot X)| = |\alpha| |X \cdot X| = |\alpha| \|X\|^2 = \|X\| \cdot |\alpha| \|X\| = \|X\| \cdot \|Y\|$$

vale l'uguaglianza.

II caso) supponiamo X e Y lin. indipendenti, essi generano un sottospazio $U = \langle\langle X, Y \rangle\rangle$ e la matrice associata al prodotto scalare ristretto ad U nella base $B_U = \{X, Y\}$ sarà

$$[X \cdot Y]_{B_U} = \begin{pmatrix} X \cdot X & X \cdot Y \\ Y \cdot X & Y \cdot Y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{perché la forma bilineare è definita positiva}$$

il determinante di $[X \cdot Y]_{B_U}$ è positivo: $(X \cdot X)(Y \cdot Y) - (X \cdot Y)^2 > 0$

$(X \cdot Y)^2 < (X \cdot X)(Y \cdot Y)$

$|X \cdot Y| < \|X\| \|Y\|$ → estraendo le radici quadrate

Dalla disuguaglianza $|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|$ con X e Y non nulli, si deduce:

$-\|X\| \|Y\| \leq X \cdot Y \leq \|X\| \|Y\|$

$-1 < \dfrac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} < 1$ $\Rightarrow$ è sempre possibile determinare un angolo ϑ con $0 \leq \vartheta \leq \pi$ tale che

$\cos\vartheta = \dfrac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$

DA CUI LA FORMULA:

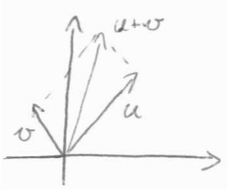
$X \cdot Y = \|X\| \|Y\| \cos\vartheta$

Se X e Y sono F-ortogonali $X \cdot Y = 0 \Rightarrow \cos\vartheta = 0 \Rightarrow$ essendo preso ϑ in $[0, \pi]$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

e diciamo che X e Y sono <u>perpendicolari</u>.

In uno spazio euclideo dunque possiamo "misurare" gli angoli, e le nozioni di ortogonalità e perpendicolarità coincidono

Disuguaglianza triangolare



Dati i vettori X ed Y di uno spazio euclideo $\Rightarrow \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Dimostrazione.

$\|X+Y\|^2 = (X+Y) \cdot (X+Y) = (X \cdot X) + (X \cdot Y) + (Y \cdot X) + (Y \cdot Y) =$

$= (X \cdot X) + 2(X \cdot Y) + (Y \cdot Y) \leq \|X\|^2 + 2\|X\| \|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2$

estraendo le radici

$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Teorema di Pitagora: se X e Y sono ortogonali $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$

$\exists$ base di V in cui la matrice associata al prodotto scalare (e quindi alla norma) sarà

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tale base è } \underline{\text{ortonormale}}$$

Se F è un prodotto scalare in uno spazio V presa una base ortonormale relativamente ad F, e la chiamo $B_{\perp m}$ $\Rightarrow$ presi $v, w \in V$ tale che $X = [v]_{B_{\perp m}}$ ed $Y = [w]_{B_{\perp m}}$ $\Rightarrow F((v, w)) = X^T [F]_{B_\perp} Y \Rightarrow X^T I Y = X^T Y = (x_1 \dots x_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$

Componenti di un vettore in uno spazio euclideo

Sia $B_{\perp m} = \{v_1 .. v_m\}$ una base ortonormale in uno spazio euclideo V, dato $v \in V$

$v = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_m v_m$

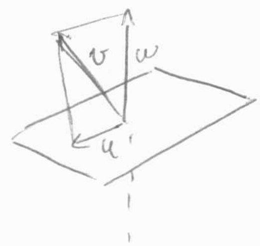
se considero $v \cdot v_1 = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i\right) \cdot v_1 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i v_i \cdot v_1) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (v_i \cdot v_1) = \alpha_1$

così $v \cdot v_j = \alpha_j \quad \forall j = 1..m$

Dato $U < V$ spazio euclideo posso determinare $U^\perp = \{v \in V \mid v \cdot u = 0 \quad \forall u \in U\}$

so che $U \oplus U^\perp = V$, ciò significa che $v \in V$ può essere dato come $v = u + w$

con $u \in U$ e $w \in U^\perp$. u è la proiezione ortogonale di v su U, w è la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$.



Dato $U = \langle\langle u_1 \dots u_k \rangle\rangle \Rightarrow V = \underbrace{\alpha_1 u_1 + .. + \alpha_k u_k}_{u} + w$

$w = V - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_k u_k$ pongo l'ortogonalità e cerco gli α_j