7.10.13

MATRICI REALI $p \times n$: $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$

CONSIDERATA LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ => L'ELEMENTO $a_{2,1} = 4$, $a_{2,3} = 6$

SE $p \neq n$ SI PARLA DI MATRICI RETTANGOLARI
SE $p = n$ SI PARLA DI MATRICI QUADRATE

DEFINIZIONI

1) LE MATRICI QUADRATE CON ENTRATE NON NULLE EVENTUALMENTE SOLO SULLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO DETTE DIAGONALI.

0) SI DICE DIAGONALE PRINCIPALE DI UNA MATRICE QUADRATA $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ L'INSIEME COSTITUITO NELLA MATRICE DAI TERMINI a_{ii} $\forall i = 1,\dots,n$

MENTRE È DETTA DIAGONALE SECONDARIA L'INSIEME COSTITUITO DALLE ENTRATE $a_{i,n+1-i}$ $\forall i = 1,\dots,n$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

ESEMPI DI MATRICI DIAGONALI

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) UNA MATRICE QUADRATA $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ È DETTA TRIANGOLARE SUPERIORE SE LE ENTRATE "AL DI SOTTO" DELLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO TUTTE NULLE, CIOÈ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ $\forall i > j$ e $i = 2,\dots,n$ $\Leftarrow$

TRIANGOLARE INFERIORE SE $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j \quad i = 1, \dots, n-1$

3) DATA UNA MATRICE QUALUNQUE $A \in M_{p \times n}$,

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots n}}$ DICIAMO <u>TRASPOSTA</u> DI A, E

LA INDICHIAMO CON A^T, LA MATRICE $B = (b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,n \\ k=1,\dots,p}}$

TALE CHE $b_{ij} = a_{ji}$

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A^T \in M_{3 \times 2}$

e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

CONSIDERO L'INSIEME $M_{p \times n}(\mathbb{R})$, DIAMO IN ESSO L'OPERAZIONE DI <u>SOMMA</u> $\tilde{+} : M_{p \times n}(\mathbb{R}) \times M_{p \times n}(\mathbb{R})$

(VUOL DIRE DARE UN' APPLICAZIONE)

PRODOTTO CARTESIANO
opera fra coppie

Dominio

$$M_{p \times n}(\mathbb{R}) \times M_{p \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{p \times n}(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \longmapsto A \tilde{+} B$$

OPERAZIONE <u>BINARIA</u>, <u>INTERNA</u> cioè

L'IMMAGINE DELLA SINGOLA COPPIA È ANCORA UN ELEMENTO DELLO STESSO INSIEME

POSTE $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij}) \Rightarrow A\tilde{+}B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,}}$

$\tilde{+}$ e $+$ sono operazioni diverse! "$+$" È LA SOMMA TRA NUMERI REALI

ESEMPIO

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ \sqrt{2} & -8 & 2/3\end{pmatrix} \Rightarrow A\tilde{+}B\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ 1+\sqrt{2} & -3 & \frac{20}{3}\end{pmatrix}$$

SIA $\mathcal{A}$ UN INSIEME E SU $\mathcal{A}$ METTIAMO UN'OPERAZIONE BINARIA INTERNA $*$: $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$(a_1,a_2) \longmapsto a_1 * a_2$$

TALE CHE SIANO VERIFICATE LE PROPRIETÀ

1) ASSOCIATIVA: $a_1 * (a_2 * a_3) = (a_1 * a_2) * a_3 \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$

2) $\exists$ DELL'ELEMENTO NEUTRO:

$\exists\, e \in \mathcal{A}$ TALE CHE $\forall a \in \mathcal{A}$ $\quad a * e = e * a = a$

3) $\exists$ DEL RECIPROCO:

$\forall a \in \mathcal{A},\ \exists\, b \in \mathcal{A} \mid a * b = b * a = e$

$\Longrightarrow (\mathcal{A}, *)$ È UNA STRUTTURA ALGEBRICA DETTA

<u>GRUPPO</u>

4) SE VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA (cioè $a_1 * a_2 = a_2 * a_1 \quad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ IL GRUPPO È DETTO <u>COMMUTATIVO</u> o <u>ABELIANO</u>

ESEMPIO:

STUDIAMO $(\mathbb{N};+)$ ed $(\mathbb{N};\cdot)$

$(\mathbb{N};+)$ NON È UN GRUPPO, non esiste il reciproco

$(\mathbb{N};\cdot)$ NON È UN GRUPPO " " " "

<u>ESERCIZIO</u>

STUDIARE LE STRUTTURE ALGEBRICHE:

$(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Z},\cdot)$; $(\mathbb{Q},+)$; $(\mathbb{Q};\cdot)$, $(\mathbb{R};+)$; $(\mathbb{R};\cdot)$; $(\mathcal{M}_{p\times n};\tilde{+})$