Il metodo che andremo ad utilizzare agisce sulle espressioni algebriche delle forme quadratiche

METODO DI RIDUZIONE DI GAUSS PER LE FORME QUADRATICHE

è un metodo algebrico e si basa sulle seguenti identità algebriche:

1) $x^2 + axy = \left(x + \frac{ay}{2}\right)^2 - \frac{a^2y^2}{4}$ $\Rightarrow$ ottengo un'identità

aggiungo e tolgo il secondo termine al quadrato

2) $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

Il metodo riduce l'espressione algebrica della forma quadratica a somme algebriche (+ e −) di quadrati; facciamolo vedere per induzione sul # di variabili.

1) $n = 1$ ovvio!

2) Supponiamolo vero fino ad un # di variabili pari ad $n-1$ e dimostriamolo per n.

① Supponiamo che data l'espressione di $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{11} \neq 0$, allora

$Q((x_1, \dots, x_n)) = a_{11}x_1^2 + R(x_2, \dots, x_n) x_1 + S(x_2, \dots, x_n)$

con $\deg R = 1$ e $\deg S = 2$

RACCOGLIAMO a_{11} alla prima parte e otteniamo:

$$a_{11}\left(x_1^2 + \frac{R(x_2, \dots, x_n)x_1}{a_{11}}\right) + S(x_2, \dots, x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{R(x_2, \dots, x_n)}{2a_{11}}\right)^2 - a_{11}\frac{R^2(x_2, \dots, x_n)}{4a_{11}^2} + S(x_2, \dots, x_n) =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{R(x_2, \dots, x_n)}{2a_{11}}\right)^2 - \frac{R^2(x_2, \dots, x_n)}{4a_{11}} + S(x_2, \dots, x_n)$$

Faccio un cambiamento di variabile:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{R(x_2, \dots, x_n)}{2a_{11}} \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y_1, \dots, y_n) = a_{11}y_1^2 - \frac{R^2(y_2, \dots, y_n)}{4a_{11}} + S(y_2, \dots, y_n)$$

Per ipotesi induttiva $\left(-\frac{R^2}{4a_{11}}(y_2, \dots, y_n) + S(y_2, \dots, y_n)\right) = Q'(y_2, \dots, y_n)$ è possibile scriverlo come somma di quadrati

② Supponiamo che non compaiano né x_1^2, né x_2^2, ma ci sia x_1x_2, quindi:

$Q(x_1, \dots, x_n) = a_{12}x_1x_n + R(x_3, \dots, x_n)x_1 + S(x_3, \dots, x_n)x_2 + T(x_3, \dots, x_n)$

con $\deg S = 1$, $\deg R = 1$ e $\deg T = 2$ sono lineari

$\Rightarrow Q(x_1, \dots, x_n) = a_{12}\left(x_1 + \frac{S}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{R}{a_{12}}\right) - \frac{R \cdot S}{a_{12}} + T$

Cambio variabili:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{S}{a_{12}} \\ y_2 = x_2 + \dfrac{R}{a_{12}} \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y) = a_{12}\, y_1 y_2 - \frac{RS}{a_{12}} + T$$

in funzione di $(y_3, \dots, y_n)$

Allora ottengo: $a_{12} \dfrac{(y_1 + y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{4} + T - \dfrac{RS}{a_{12}}$

Faccio un secondo cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \\ \vdots \\ z_n = y_n \end{cases} \Rightarrow Q(z_1, \dots, z_n) = \frac{a_{12}}{4} z_1^2 + \frac{a_{12}}{4} z_2^2 + T(z_3, \dots, z_n) - \frac{R(z_3, \dots, z_n) S(z_3, \dots, z_n)}{a_{12}}$$

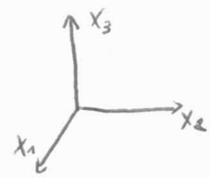
Per ipotesi induttiva $T(z_3, \dots, z_n) - R(z_3, \dots, z_n)\, S(z_3, \dots, z_n) \frac{1}{a_{12}}$ potrà essere scritto come somma di quadrati.

E QUINDI $Q(z_1, \dots, z_n)$ SARÀ SCRITTA COME SOMMA DI QUADRATI

cvd

ESERCIZIO:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$



Supponiamo di prendere in $\mathbb{R}^3$ la base canonica

$\Rightarrow [Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -> la matrice non è degenere perché il rango è 3

Tutte e tre le variabili devono comparire al quadrato, alla fine.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

$\Rightarrow$ Cambio variabili $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(y_1, y_2, y_3) = y_3^2 - 4y_1y_2 + 4y_2^2$

$$\Rightarrow Q(y_1, y_2, y_3) = 4\left(y_2 - \frac{y_1}{2}\right)^2 - y_1^2 + y_3^2$$

$\Rightarrow$ Cambio le variabili

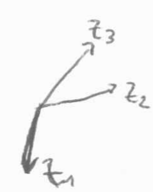
$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 - \dfrac{y_1}{2} \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow Q(z_1, z_2, z_3) = -z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2$$

Nella nuova base B di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata a Q è:

$$[Q]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segno di Q: $(2, 1)$

Arriverò ad avere un sistema di riferimento simile a



DEFINITO DALLA NUOVA BASE B DI $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 - \frac{x_1}{2} \\ z_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$$
: QUESTO È IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE OTTENUTO COMPONENDO QUELLI FATTI NELL'ESERCIZIO

VOGLIAMO DETERMINARE LA BASE $\mathcal{B}$ DI $\mathbb{R}^3$ IN CUI $[Q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad (\mathbb{R}^3, e) \xrightarrow{id} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$id\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad id\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad id\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \rightarrow \text{dobbiamo cercare l'inversa}$$

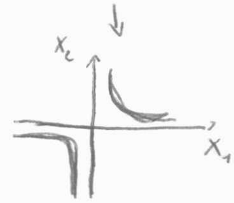
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{2R_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 - R_3 = R_3}{\overset{R_1 + R_2 = R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{-R_3 = R_3}{\overset{\frac{R_2}{2} = R_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

LA MATRICE A^{-1} È LA MATRICE S NELLA RELAZIONE DI CONGRUENZA:
$[Q]_{\mathcal{B}} = S^T [Q]_e S$.

Una quadrica in un piano è una conica. Es. $x_1 x_2 = 1 \rightarrow$ è un'iperbole



ADOPEREREMO LA RIDUZIONE A FORMA CANONICA DELLE FORME QUADRATICHE PER CLASSIFICARE LE QUADRICHE IN UNO SPAZIO EUCLIDEO

DEFINIZIONE

Lo <u>SPAZIO EUCLIDEO</u> è uno spazio vettoriale reale dotato di una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Tale forma bilineare è detta <u>PRODOTTO SCALARE</u>.

ESEMPI:

① in $\mathbb{R}^2$ con $F((x,y)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [F]_e$$

② in $\mathbb{R}^n$ con $F((x,y)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

③ $V = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue} \} = \mathcal{C}^0_{[a,b]}$

Considero la forma $F: \mathcal{C}^0_{[a,b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \to \mathbb{R}$. F è un prodotto scalare (dimostrare)

$$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

④ $\mathbb{R}[x]_n$ con $F: \mathbb{R}[x]_n \times \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$F((p,q)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ E' UNO SPAZIO EUCLIDEO : DIMOSTRARLO