05/03/14
GEOMETRIA

$T: V \longrightarrow V$ lineare. T è un operatore (endomorfismo) e supponiamo che il dominio e il codominio abbiano la stessa base B $\Rightarrow$ $[T]_B^B$ è la matrice quadrata associata a T nella base B. Cambio base e prendo B' $\Rightarrow$ abbiamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} (V,B) & \xrightarrow{T} & (V,B) \\ {\scriptstyle id}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle id'} \\ (V,B') & \xrightarrow{T} & (V,B') \end{array}$$

$\Rightarrow$ supponiamo che detta S la matrice $[id]_{B'}^{B}$ associata all'identità, allora $[id']_B^{B'} = S^{-1}$ $\Rightarrow$ $[T]_{B'}^{B'} = S^{-1}[T]_B^B S$

$T = id' \circ T \circ id$

Posta $A = [T]_B^B$ e $B = [T]_{B'}^{B'}$ $\Rightarrow$ $B = S^{-1}AS$

DEFINIZIONE: Due matrici quadrate A e $B \in M_{n\times n}$ si dicono **SIMILI** se $\exists S \in M_{n\times n}$ invertibile tale che $B = S^{-1}AS$. Scriveremo $A \sim_S B$. In $M_{n\times n}$ la relazione di similitudine è d'equivalenza (simmetrica, riflessiva, transitiva), infatti:

1) è riflessiva: $A \sim_S A$ $\forall A \in M_{n\times n}$ $\Rightarrow$ $A = I\,A\,I$

2) è simmetrica: $A \sim_S B \Rightarrow B \sim_S A$ $\forall A, B \in M_{n\times n}$ $\Rightarrow$ per ipotesi $\exists S$ invertibile tale che $B = S^{-1}A\,S$

Cerco T invertibile tale che $A = T^{-1}BT$. Se prendo $T = S^{-1}$: $\Rightarrow$

$$T^{-1}BT = SBS^{-1} = S(S^{-1}AS)S^{-1} = (SS^{-1})A(SS^{-1}) = A$$

3) è transitiva: se $A \sim_S B$ e $B \sim_S C$ $\Rightarrow$ $A \sim_S C$ (Dimostrare)

OSSERVAZIONE:
Le matrici associate ad uno stesso operatore in basi diverse sono simili. Esiste una corrispondenza tra un operatore e una classe di equivalenza di matrici simili.

PROPOSIZIONE: Matrici simili hanno lo stesso determinante.

DIMOSTRAZIONE: Siano A e $B \in M_{n\times n}$ e $A \sim_S B$ $\Rightarrow$ $\exists S$ tale che $B = S^{-1}AS$ $\Rightarrow$ $|B| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}||A||S| = |A|$

PROPOSIZIONE: Matrici simili hanno lo stesso rango

LEMMA: Siano $A, S \in M_{n\times n}$ con S invertibile $\Rightarrow$ $rg\, A\cdot S = rg\, S\cdot A = rg\, A$

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA: $rg\, AS = rg\, A$

Siano $c_S^1, c_S^2 \dots c_S^n$ colonne di S, vettori linearmente indipendenti.

$A\cdot S$ ha per colonne $A\cdot c_S^1, A\cdot c_S^2 \dots A c_S^n$, ogni colonna $A c_S^j$ è combinazione lineare delle colonne di A.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 s_1 + a_2 s_2 \\ a_3 s_1 + a_4 s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} s_2$$

$\Rightarrow rg\, AS \le rg\, A$

Inoltre $rg\, A = rg (A\cdot S)S^{-1} \le rg\, AS \le rg\, A$ perciò $rg\, AS = rg\, A$

Allo stesso modo si dimostra $rg\, SA = rg\, A$

DIMOSTRAZIONE DELLA PROP.: Considero $A \sim_S B \Rightarrow \exists S$ invertibile tale che $B = S^{-1}AS$ $\Rightarrow$ $rg\, B = rg\, S^{-1}AS = rg (S^{-1}A)S = rg\, AS = rg\, A$

DEFINIZIONE: Una matrice quadrata A è detta diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, cioè $\exists D$ e S invertibile tali che $D = S^{-1}AS$

Studiamo altri invarianti per similitudine:

Polinomio caratteristico di una matrice quadrata A: si ottiene considerando $\det(A - \lambda I)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

Osservazione: Il grado del polinomio $p_A(\lambda)$ è dato dall'ordine di A. Se $A \in M_{n \times n} \Rightarrow \deg p_A(\lambda) = n$

In molti testi $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ che è un polinomio monico

$|A - \lambda I| = (-1)^m \lambda^m + c_1 \lambda^{m-1} + c_2 \lambda^{m-2} + \dots + c_m$

Le radici del polinomio caratteristico si dicono radici caratteristiche di A; esse sono al massimo n

ESEMPIO

$p(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$: SONO LE RADICI CARATTERISTICHE $\Rightarrow$

$p_A(\lambda)$ si scompone in $\left(\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)$

Se scomponiamo un polinomio in fattori del tipo $(\lambda-\alpha)^k(\lambda-\beta)^h(\lambda-\gamma)^l \dots = p_A(\lambda)$ le radici di $p(\lambda)$ sono $\alpha, \beta, \gamma \dots$ la loro molteplicità algebrica è data rispettivamente dal grado con cui compare il polinomio componente nella scomposizione effettuata, quindi in questo caso α avrà molteplicità algebrica k, β avrà molteplicità h e γ avrà molteplicità l E COSÌ VIA... Scriviamo $\mu(\alpha) = k$ $\mu(\beta) = h$ $\mu(\gamma) = l$ ...

Proposizione: Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

DIM. Siano A e $B \in M_{n \times n}$ $A \sim B \Rightarrow \exists S$ invertibile tale che $B = S^{-1}AS$

$$|B - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda I S| = |S^{-1}(A - \lambda I)S| =$$

$$= |S^{-1}||A - \lambda I||S| = |S|^{-1}|A - \lambda I||S| = |A - \lambda I|.$$