4/12/13

Fascio di piani in $\mathbb{R}^3$: é combinazione lineare di due piani Π_1 e Π_2, cioé se

$\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e

$\Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$\Rightarrow$ l'equazione del fascio é:

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$; poiché λ e μ non sono contemporaneamente nulli, possiamo supporre $\lambda \neq 0$ e quindi dividere per λ

$\Rightarrow$ l'equazione si riduce a:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + t(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

ATTENZIONE perché in questa formulazione "perdiamo" il piano Π_2, che può $\in$ fascio Π_1 e Π_2 possono essere coincidenti, secanti, paralleli e diversi a seconda del rango del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice A e $(A \vdots B)$

$\Rightarrow$ il sistema ha soluzione per R-C $\Leftrightarrow rg A = rg(A \vdots B)$

$$\Rightarrow rg A \begin{cases} 1 \Rightarrow rg(A \vdots B) <^{1}_{2} \\ 2 \Rightarrow rg(A \vdots B) = 2 \end{cases}$$

Se $rg\, A = 2 \Rightarrow$ il sistema ha soluzione e $\dim Sol\, \Sigma = 1 \Rightarrow Sol\, \Sigma$ è una retta, intersezione di Π_1 e Π_2: tale retta è detta ASSE del fascio ed il fascio è <u>PROPRIO</u>

Se $rg(A:B) = rg\, A = 1 \Rightarrow$ il sistema ha come soluzione il piano comune ed il fascio è ridotto ad un piano

Se $rg\, A = 1$ e $rg(A:B) = 2 \Rightarrow$ i piani sono paralleli e quindi tutti i piani del fascio sono //: fascio <u>IMPROPRIO</u>

$\Pi_1 \,//\, \Pi_2 \Leftrightarrow$ hanno la stessa direzione: questa verifica è "veloce" se abbiamo la loro equazione parametrica

vettorialmente abbiamo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [\vec{v}_{dir}]_{B_{dir}} + P_0$

$\Rightarrow$ posto $B_{dir} = \{V_1, V_2\}$

$\Rightarrow V \in$ direzione di Π_1 è dato in questo modo $V = sV_1 + tV_2$

$\Rightarrow [V_{dir}]_{B_{dir}} = s[V_1]_{B_{dir}} + t[V_2]_{B_{dir}}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} V^1_x \\ V^1_y \\ V^1_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} V^2_x \\ V^2_y \\ V^2_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$ EQUAZIONE VETTORIALE (2)

$\Rightarrow$ l'equazione parametrica è:

$$\begin{cases} x = s V^1_x + t V^2_x + x_0 \\ y = s V^1_y + t V^2_y + y_0 \\ z = s V^1_z + t V^2_z + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} V^1_x & V^2_x & W^1_x & W^2_x \\ V^1_y & V^2_y & W^1_y & W^2_y \\ V^1_z & V^2_z & W^1_z & W^2_z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{se } rg\, M = 2 \Rightarrow \pi_1 // \pi_2$$

Se $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ e

$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

$\Rightarrow \pi_1 // \pi_2 \Longleftrightarrow$ CONSIDERANDO le loro direzioni CHE HANNO EQUAZIONI

$a_1 x \; b_1 y + c_1 z = 0$ e $a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$

SI HA:

$$\Rightarrow \pi_1 // \pi_2 \Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Rette in $\mathbb{R}^3$: dalla definizione (DI SOTTOSPAZIO AFFINE) si ha subito:

L'EQUAZIONE VETTORIALE:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} v_x^{dir} \\ v_y^{dir} \\ v_z^{dir} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s\, v_x^{dir} + x_0 \\ y = s\, v_y^{dir} + y_0 \\ z = s\, v_z^{dir} + z_0 \end{cases}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA

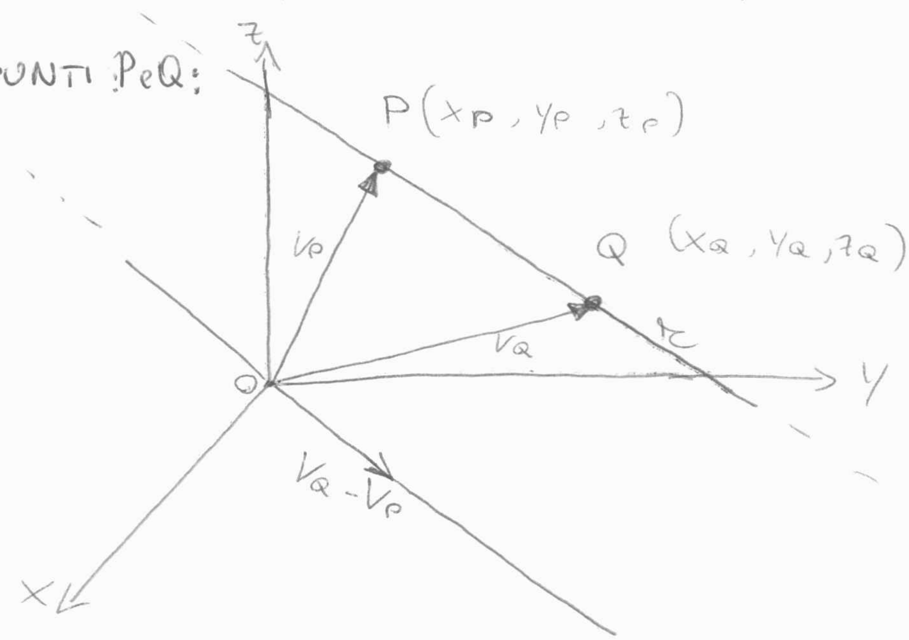
$\Rightarrow$ l'equazione cartesiana sarà:

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani di cui r è asse avrà equazione:

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$$

RETTA PER DUE PUNTI P e Q:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = s(x_Q - x_P) + x_P \\ y = s(y_Q - y_P) + y_P \\ z = s(z_Q - z_P) + z_P \end{cases}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA

$$\Rightarrow \begin{cases} s = \dfrac{x - x_P}{x_Q - x_P} \\ s = \dfrac{y - y_P}{y_Q - y_P} \\ s = \dfrac{z - z_P}{z_Q - z_P} \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \frac{z - z_P}{z_Q - z_P}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{y - y_P}{y_Q - y_P} \\ \dfrac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \dfrac{z - z_P}{z_Q - z_P} \end{cases}$$

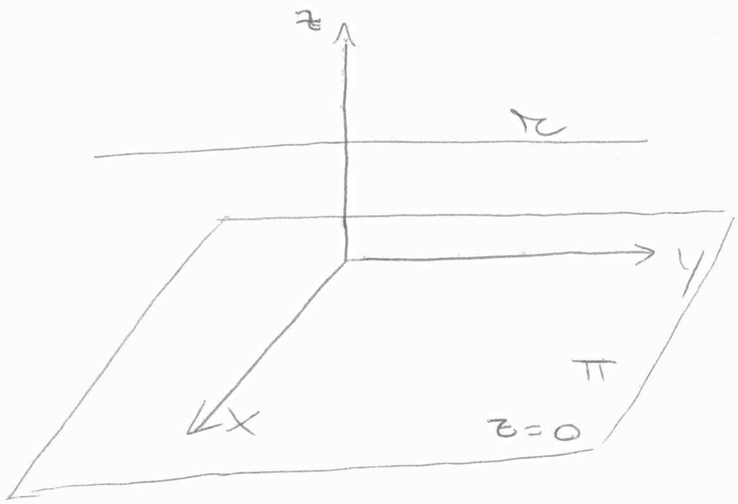
EQUAZIONE CARTESIANA

Siano $r_1 = \begin{cases} x = s x_1 + x_0 \\ y = s y_1 + y_0 \\ z = s z_1 + z_0 \end{cases}$ ed $r_2 = \begin{cases} x = s x_2 + x_3 \\ y = s y_2 + y_3 \\ z = s z_2 + z_3 \end{cases}$

DUE RETTE DI $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow r_1 // r_2 \iff \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ ha rango 1

quando una retta e un piano sono paralleli?



(*) $r : \begin{cases} x = s \cdot l + x_0 \\ y = s m + y_0 \\ z = s n + z_0 \end{cases}$ con l, m, n PARAMETRI DIRETTORI di r

$\pi : \begin{cases} x = s l_1 + t l_2 + x_1 \\ y = s m_1 + t m_2 + y_1 \\ z = s n_1 + t n_2 + z_1 \end{cases}$

$$\det\begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & m_1 & m_2 \\ n & n_1 & n_2 \end{pmatrix} = 0 \iff r \,//\, \pi$$

SE LA RETTA r È DATA DALL'EQUAZIONE PARAMETRICA (*)

e π è dato da: $\pi = ax + by + cz + d = 0$

$\Rightarrow r // \pi$

$\iff al + bm + cn = 0$

VEDERE PER ESERCIZIO I RIMANENTI CASI