Esercizio

Dimostra che $B_{m_{2\times 3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

① Sono linearmente indip.:

PONIAMO

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_6 \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$; ESEGUITE LE OPERAZIONI AL PRIMO MEMBRO, OTTENIAMO

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ PERCHÈ DUE MATRICI DELLO STESSO ORDINE SONO UGUALI SE HANNO TUTTE LE ENTRATE UGUALI

② Sono generatori SE:

Data $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists\, a_1, a_2, \ldots, a_6 \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} + \ldots + a_6 \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$.

ESEGUENDO LE OPERAZIONI INDICATE

Quindi $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$. È vera l'uguaglianza se $a_1 = x_1 \ldots a_6 = x_6$.

$\Rightarrow B_{m_{2\times 3}}$ è base di $\mathcal{M}_{2\times 3} \Rightarrow \dim \mathcal{M}_{2\times 3} = 6$, RICORDANDO LA DEF. DI DIMENSIONE.

PROPOSIZIONE:

Se conosciamo le dimensioni di uno spazio vettoriale V, ad esempio $\dim V = n$, è sufficiente, per trovarne una base, determinare n vettori di V linearmente indipendenti.

ESEMPIO:

Cerco una base di $\mathbb{R}^3$: prendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e verifico che siano linearmente indipendenti:

DIMOSTRIAMO CHE:

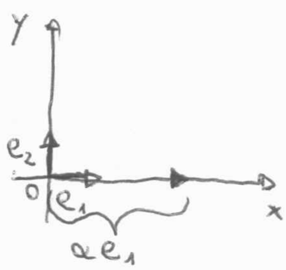
POSTO $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$:

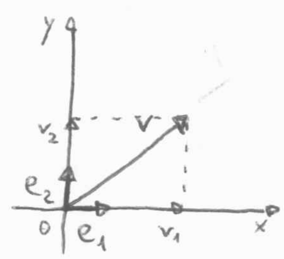
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considero $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_3 = R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_2 = R_3,\ R_3 = R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$

Nel piano $\mathbb{R}^2$, i vettori geometrici che sono la base canonica del piano sono quelli che corrispondono a $C_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ovvero i versori: e_1, e_2 ($\vec{i}, \vec{j}$)

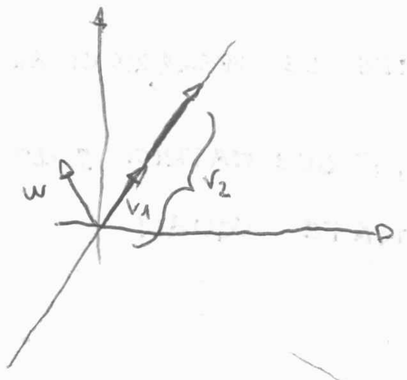




$V = V_1 + V_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$

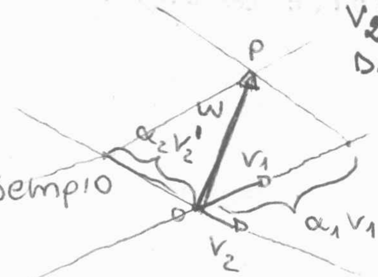
SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI IN MODO EVIDENTE.

in un piano, v_1 e v_2 sono lin. dipendenti se $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \mid v_2 = \alpha v_1$, ovvero se giacciono sulle stessa retta passante per l'origine.



Essendo v_1 e v_2 dipendenti, w non può essere scritto sotto forma di combinazione lineare di v_1 e v_2, QUINDI v_1, E v_2 NON SONO GENERATORI DI UN PIANO SE GIACCIONO SULLA STESSA RETTA PER L'ORIGINE DOBBIAMO, PRENDERE, DATO v_1, UN SECONDO VETTORE v_2', CHE NON STA SULLA RETTA GENERATA DA' v_1:

Prendo ad esempio



Avrò che $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2'$

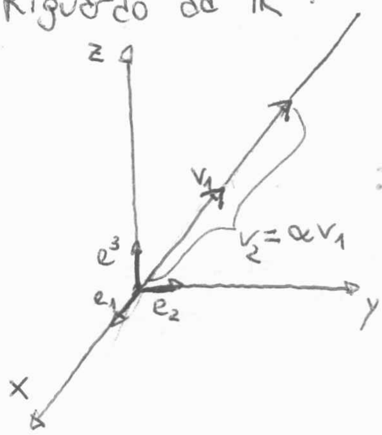
ALLORA

Traccio le parallele alle rette di v_1 e v_2' passanti per P per trovare le componenti di w.

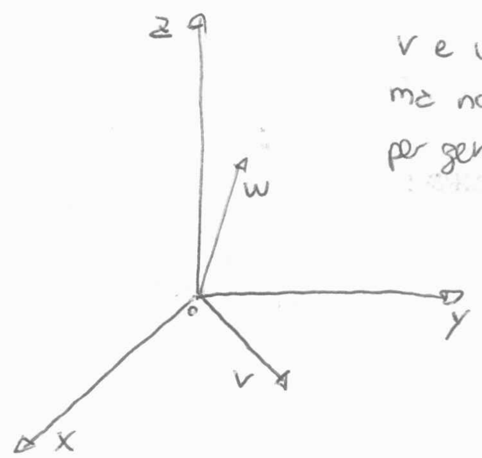
Ricapitolando:

2 vettori sono lin. dipendenti se uno è multiplo dell'altro, IN UN QUALUNQUE SPAZIO VETTORIALE.

Riguardo ad $\mathbb{R}^3$:

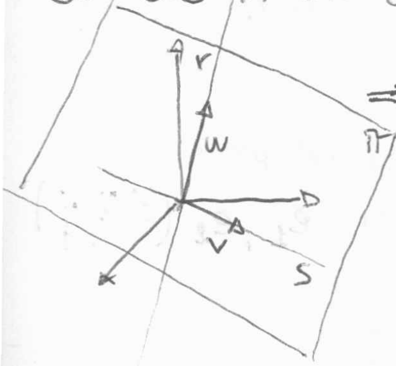


$v_2 = \alpha v_1$
con v_1 e v_2 dipendenti

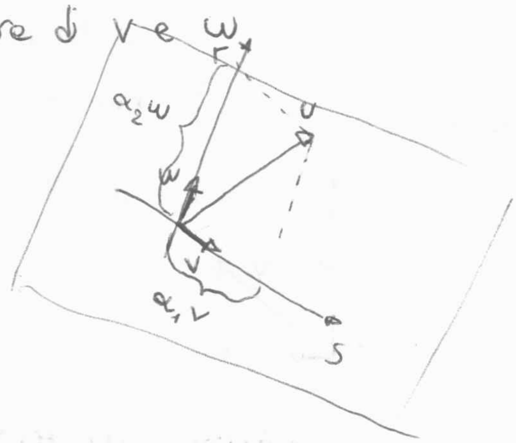


v e w sono indipendenti ma non sono abbastanza per generare $\mathbb{R}^3$ che ha dim=3.

So che in uno spazio $\mathbb{R}^3$ due rette che si incontrano in un punto generano un piano.



Dal momento che v e W sono indipendenti $\Rightarrow$ generano il piano π,
$\Rightarrow$ avrò che ogni vettore su π potrà essere scritto come combinazione lineare di v e w.



Avrò che un vettore u è linearmente dipendente da v e w se e solo se u giace nel piano π generato da v e w. ($\pi = \langle\langle v, w \rangle\rangle$)

Per via grafica ho dimostrato che $u = \alpha_1 v + \alpha_2 w$

Ora: sia $u = x_1 v + x_2 w \Rightarrow u \in \langle\langle v, w \rangle\rangle$ ed essendo v e w linearmente indipendenti $\langle\langle v, w \rangle\rangle$ è un piano, poiché $\{v, w\}$ è base di $\langle\langle v, w \rangle\rangle$ e quindi $\langle\langle v, w \rangle\rangle$ ha dimensione DUE, $\dim \langle\langle u, w \rangle\rangle = 2 \Rightarrow u \in \pi$.

VICEVERSA: SE $u \in \pi \Rightarrow u$ È COMBINAZIONE LINEARE DI v e w

Perciò dati due vettori linearmente indipendenti v e w, per avere un terzo vettore linearmente indipendente dovrò prendere un vettore t non appartenente al piano $\pi = \langle\langle v, w \rangle\rangle$

Per quanto riguarda il prodotto vettoriale, dati $v, w \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v \times w = v \wedge w = u$ dove u è un vettore che ha direzione data dalla perpendicolare al piano $\langle\langle v, w \rangle\rangle$.

La lunghezza di u: $\|u\|$ = area del parallelogramma definito da v e w

IL VERSO È DEFINITO DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA.