ESEMPIO

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$x;y \longmapsto (x+y;\ -x;\ 2y-x)$

FISSIAMO LA BASE CANONICA NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO LA BASE $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

COSTRUIAMO LA MATRICE $[L]_e^B$

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1-R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2+2R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{R_3/3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{R_1-R_3}{\overset{R_3-R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{R_2/2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

RIPETO LE OPERAZIONI PER OTTENERE L'ALTRO VETTORE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$[L]_e^B = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad L: (\mathbb{R}^2; \mathcal{C}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3; \mathcal{C})$$

$$[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

LE COORDINATE DEL VETTORE $\overbrace{v}^{\text{VETTORE DI UNA BASE } \mathcal{B}}$ ESPRESSE NELLA SUA STESSA BASE, SONO SEMPRE QUELLE DELLA BASE CANONICA!

AD ES: $\{v_1; v_2\}$: $v_1 = 1v_1 + 0v_2 \Rightarrow [v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = 0v_1 + 1v_2 \Rightarrow [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

SE, DATA UNA MATRICE A, CERCO L'APPLICAZIONE LINEARE AD ESSA ASSOCIATA, FACENDO $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; CONSIDERO SEMPRE LE BASI CANONICHE NEGLI SPAZI!

$L: (\mathbb{R}^2; \mathcal{C}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3; \mathcal{C})$

$$(x; y) \longmapsto (x-2y; -x+y; 5y), \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -x+y \\ 5y \end{pmatrix}$$

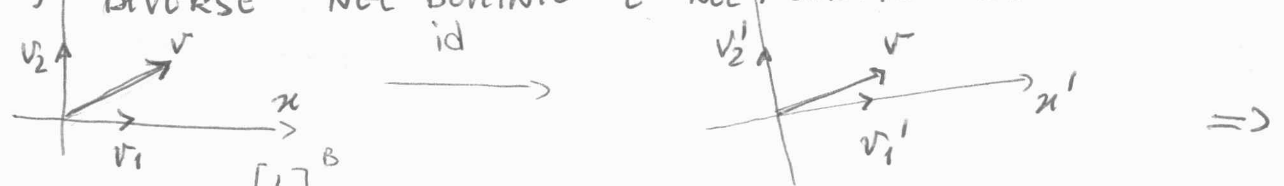
SE CERCO L'APPLICAZIONE ASSOCIATA AD A, IN ALTRE BASI, QUESTA APPLICAZIONE TROVATA NON È QUELLA GIUSTA POICHÉ OTTENGO COSÌ SEMPRE L'APPLICAZIONE ASSOCIATA ALLA MATRICE, MA NELLE BASI CANONICHE DEGLI SPAZI!! CIOÈ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2} = [L]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$$

SE VOGLIO L'APPLICAZIONE L PER LA QUALE $A = [L]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$ DEVO CERCARE LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE CERCATA, NELLE BASI CANONICHE, POICHÉ SOLO TRAMITE QUESTA POSSO SCRIVERE L IN FORMA ANALITICA. NELL'ESEMPIO: SO CHE AD $(\mathbb{R}^2, \mathcal{C}) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$ È ASSOCIATA LA MATRICE A DATA.

$\cancel{(\mathbb{R}^2, \mathcal{C}) \xrightarrow{L} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})}$ CAMBIO LE BASI NEGLI SPAZI (IN QUESTO ESEMPIO SOLO NEL CODOMINIO) PASSANDO ALLE BASI CANONICHE E CERCO $[L]^{e}_{e}$:

NELLO STESSO SPAZIO QUESTO CAMBIAMENTO DI COORDINATE ~~È~~ PUO' ESSERE PENSATO COME IL RISULTATO DELL'AVER APPLICATO L'IDENTITÀ DA UNO SPAZIO IN SE', PRENDENDO BASI DIVERSE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO:



$$\begin{array}{ccc} & [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} & \\ v & \longmapsto & L(v) \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) & \xrightarrow{L} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ \text{id} \uparrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{id.} \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) & \xrightarrow{L} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \\ v & \longmapsto & L(v) \\ & [L]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} & \end{array}$$

POSSIAMO CREARE QUESTO DIAGRAMMA DI FUNZIONI CHE RISPECCHIA LA COMPOSIZIONE DELLE FUNZIONI

È UN DIAGRAMMA COMMUTATIVO

NEL SENSO CHE PARTENDO DA UNO SPAZIO QUALUNQUE E SEGUENDO LE FUNZIONI FINO AD UN ALTRO SPAZIO SEGUENDO UN VERSO DI PERCORRENZA SI OTTIENE LO STESSO RISULTATO CHE SI OTTERREBBE ANDANDO NEL VERSO OPPOSTO.

COMPOSIZIONE

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3} \circ L \circ \text{id}_{\mathbb{R}^2} = L$$

DEVO TROVARE $[L]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ AVENDO $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ SFRUTTANDO QUEL ~~IL~~ DIAGRAMMA COMMUTATIVO : VEDIAMO COME:

RICORDO CHE

DATE $L_1 : V \to W$ e $L_2 : W \to U$; LINEARI => POSSO CONSIDERARE $L = L_2 \circ L_1 : V \to U$: È LINEARE CIOÈ ABBIAMO LA

PROPOSIZIONE: LA COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI È UN'APPLICAZIONE LINEARE (DA DIMOSTRARE)

DATE LE BASI NEI DOMINI E CODOMINI

=> POSSO COSTRUIRE : $[L_1]^{B_W}_{B_V}$, $[L_2]^{B_V}_{B_W}$, $[L]^{B_U}_{B_V}$ E SI DIMOSTRA CHE:

$$\Rightarrow \boxed{[L]^{B_U}_{B_V} = [L_2]^{B_U}_{B_W} \cdot [L_1]^{B_W}_{B_V}}$$

INFATTI:

SUPPONIAMO

$\dim V = k$ $\quad \dim W = m$ $\quad \dim U = p$ E QUINDI

$[L_1] \in \mathcal{M}_{m \times k}$; $[L_2] \in \mathcal{M}_{p \times m}$; $[L] \in \mathcal{M}_{p \times k}$

DIMOSTRAZIONE

CONSIDERO $v \in V \mid [v]_{B_V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix}$

$$[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} [v]_{B_V}$$

$$\| $$

$$[L]_{B_V}^{B_U} [v]_{B_V} = [L(v)]_{B_U} = [L_2 \circ L_1(v)]_{B_U} = [L_2(L_1(v))]_{B_U} =$$

$$= [L_2]_{B_W}^{B_U} \cdot [L_1(v)]_{B_W} = [L_2]_{B_W}^{B_U} [L_1]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V}$$

c.v.d.

OSSERVAZIONE

$L: V \longrightarrow W$ INVERTIBILE $\Rightarrow \exists \; L^{-1}: W \longrightarrow V$ TALE CHE ($L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = id$)

CONSIDERO LE MATRICI:

$[L]_{B_V}^{B_W}$ e $[L^{-1}]_{B_W}^{B_V} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [L \circ L^{-1}]_{B_W}^{B_W} = [id_W]_{B_W}^{B_W} = I$$ $\Rightarrow$ PERCHÈ C'È LA STESSA BASE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO DI id

$$\|$$

$$[L]_{B_V}^{B_W} \cdot [L^{-1}]_{B_W}^{B_V} \Rightarrow [L^{-1}] = [L]^{-1} = I$$

(BISOGNA CONSIDERARE ANCHE L'ALTRA COMPOSIZIONE: $L^{-1} \circ L = id$

$[L^{-1}] \cdot [L] = I \Rightarrow [L^{-1}] = [L]^{-1}$

RITORNO ALL'ESEMPIO

$$id_{\mathbb{R}^3} \circ L \circ id_{\mathbb{R}_2} = L$$

$$\circledast \quad [id_{\mathbb{R}^3}]_B^{\mathcal{E}} \cdot [L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \cdot [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$$

$\hookrightarrow$ Lo devo trovare questo $\quad$ " I_2

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ CONSIDERO LE DUE BASI $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$:

v_1

$$id(v_1) = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ E COSÌ PER v_2 e $v_3 \Rightarrow$

ESEGUO LE OPERAZIONI $\circledast$

$$\Rightarrow [id_{\mathbb{R}^3}]_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & 5/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$ MATRICE DELL'APPLICAZIONE NELLA BASE CANONICA $= [L]_e^e$

$\Rightarrow$ POSSO DETERMINARE L'APPLICAZIONE L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \\ -x+2y \end{pmatrix}$$ QUINDI:

$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, -x, -x+2y)$$