02-10-13

Σ sistema lineare non omogeneo di p equazioni in n incognite

$$\Sigma \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j = b_p \end{cases}$$

PROPOSIZIONE:

L'operazione di "moltiplicare un'equazione per uno scalare" (1) (è detta OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA) dà origine ad un nuovo sistema equivalente a quello di partenza

RICORDO LE SEGUENTI DEFINIZIONI

corollario: conseguenza immediata di una proposizione già dimostrata

lemma: proposizione volta a dimostrare una parte di teorema o proposizione principale

DIMOSTRAZIONE

Sia $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 \dots \hat{x}_n)$ una soluzione di Σ: DETTO $Sol\Sigma$ l'insieme delle soluzioni di Σ

[$\hat{x}$ = DEFINISCE UN ELEMENTO CHE ho fissato IN $Sol\Sigma$] $\Rightarrow$ SCRIVIAMO $\hat{x} \in Sol\Sigma$

cioè
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \hat{x}_j - b_1 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} \hat{x}_j - b_p = 0 \end{cases}$$

[sostituisco $\hat{x}$: ALLORA ogni equazione del sistema diventa un'identità,] PER DEFINIZIONE DI SOLUZIONE

Ora considero $\alpha \in \mathbb{R}$ e moltiplico la k-esima equazione di Σ per $\alpha \Longrightarrow$ ottengo:

UN NUOVO SISTEMA:

$\boxed{\text{con } \alpha \neq 0}$

$\boxed{\text{ATTENZIONE: IMPORTANTE!}}$

$$\Sigma_1 \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j - b_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k\right) = 0 \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{kj} x_j - \alpha b_k = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j - b_p = 0 \end{cases}$$

sostituendo $\hat{x}$ ottengo:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \hat{x}_j - b_1 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{kj} \hat{x}_j - \alpha b_k = \alpha\Big(\overbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \hat{x}_j - b_k}^{0}\Big) = \alpha \cdot 0 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} \hat{x}_j - b_p = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \hat{x}$ È SOLUZIONE DI Σ_1

Ho dimostrato che

$Sol\Sigma \subseteq Sol\Sigma_1$ CIOÈ

$\Longrightarrow$ se $\hat{x} \in Sol\Sigma$ allora $\hat{x} \in Sol\Sigma_1$

(~~Per tornare al sistema iniziale basta moltiplicare il sistema finale per $\frac{1}{\alpha}$, ponendo $\alpha \neq 0$.~~) DEVO DIMOSTRARE $Sol\Sigma = Sol\Sigma_1$

QUINDI: Devo dimostrare $Sol \Sigma_1 \subseteq Sol \Sigma$ cioè se $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots \tilde{x}_n) \in Sol \Sigma_1 \Rightarrow \tilde{x} \in Sol \Sigma$

È sufficiente moltiplicare la k-esima equazione di Σ_1 per lo scalare $\frac{1}{\alpha}$ (con $\alpha \neq 0$ per ipotesi) e ripetere il ragionamento precedente. C.V.D.

OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA (2)

Un'altra operazione che dà origine a sistemi equivalenti è la 2) sostituzione di un'equazione con la somma di tale equazione e un'altra del sistema Σ.

Da dimostrare

OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA (3)

(3) Lo scambio di equazioni all'interno di Σ dà origine ad un nuovo sistema Σ_1 equivalente a Σ

Da dimostrare

Poniamo $\Sigma \sim \Sigma'$ per indicare che Σ è equivalente a Σ'.

La relazione di "$\sim$" di equivalenza tra due sistemi lineari di p equazioni in n variabili è una relazione di equivalenza nell'insieme di tali sistemi. [Ogni sistema è un elemento dell'insieme e la relazione tra i sistemi è una relazione di equivalenza = relazione riflessiva, simmetrica e transitiva]

Da dimostrare

MATRICI

Abbandoniamo la scrittura del sistema ed introduciamo la matrice per lavorare con le matrici dei coefficienti.

matrice: tabella di numeri reali ordinata in righe e colonne

esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

questa è una matrice 2x3: ha due righe e 3 colonne

La matrice con "p" righe e "n" colonne si chiama matrice p x n: il primo numero è quello delle righe, IL SECONDO DELLE COLONNE un modo generico diventa:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$ con "a_{ij}" uno scalare

i numeri e pedice di ogni lettera indicano la sua posizione e rispettivamente la riga e la colonna in matrice.

IL PRIMO PEDICE E' IL NUMERO DELLA RIGA, IL SECONDO IL NUMERO DELLA COLONNA

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{M}$ = insieme delle matrici

A = matrice considerata

Sia Σ un sistema lineare con 3 equazioni e 4 incognite

esempio:

$$\Sigma \begin{cases} -x_1 + x_4 = 3 \\ 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

voglio associare una matrice a tale sistema

Riportiamo i coefficienti ed i termini noti in matrice.

SCRIVENDO "0" quando il termine IN QUELLA VARIABILE non compare.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & c \end{array} \end{array}$$

$\longrightarrow$ matrice completa del sistema, perché contiene anche i termini noti

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti o matrice incompleta