Esame di Geometria 13/06/2018

Esercizio 1. *Sia V lo spazio di $\mathbb{R}^4$ così definito:*

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 4y + z - 5w = 0\}.$$

Determinare:

1. *una base ortonormale di V;*
2. *la proiezione ortogonale del vettore $u = (0, 1, 0, 1)^T$ sul sottospazio V;*
3. *il volume del parallelepipedo avente per lati i vettori di una base di V;*
4. *il complemento ortogonale di V.*

Esercizio 2. *Dati il piano $\pi\colon 2x + 4y + z - 5 = 0$, il punto $A = (2, -1, 3)$, la retta*

$$r\colon \begin{cases} x = z + 4, \\ y = 2z + 3, \end{cases}$$

1. *scrivere l'equazione del fascio di piani per la retta r;*
2. *determinare la retta passante per A, parallela al piano π e perpendicolare alla retta r.*

Esercizio 3. *Sia $F_k\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare tale che la matrice associata nella base canonica sia*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *trovare, se esiste, un valore del parametro reale k tale che $F_k((e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)) = 4$;*
2. *per quali valori di k, se esistono, la forma quadratica associata ha segnatura $(1, 2)$;*
3. *determinare la forma canonica per $k = -1$ e la base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la forma quadratica è ridotta a forma canonica.*

Soluzione dell'esercizio 1

Punto 1. Risolvendo l'equazione che definisce V, si trova

$$z = 5w - 2x - 4y$$

cioè z è la variable dipendente mentre x, y, w sono le variabili indipendenti. Ponendo $x = 1$, $y = 0$, $w = 0$, ne segue che $z = -2$ e si trova la soluzione $v_1 = (1, 0, -2, 0)$. Ponendo $y = 1$, $x = 0$, $w = 0$, ne segue che $z = -4$ e si trova la soluzione $v_2 = (0, 1, -4, 0)$. Ponendo $w = 1$, $x = 0$, $y = 0$, ne segue che $z = 5$ e si trova la soluzione $v_3 = (0, 0, 5, 1)$.

Si conclude che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V, che sapevamo già avere dimensione 3 perché definito da 1 equazione (non nulla) in 4 variabili.

Calcoliamo una base ortogonale di V:

$$w_1 = v_1 = (1, 0, -2, 0),$$
$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\, w_1 = (0, 1, -4, 0) - \frac{8}{5}\,(1, 0, -2, 0) = \left(-\frac{8}{5}, 1, -\frac{4}{5}, 0\right),$$

e possiamo considerare $\bar{w}_2 = 5w_2 = (-8, 5, -4, 0)$ al posto di w_2, poi:

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\, w_1 - \frac{v_3 \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\, \bar{w}_2 = (0, 0, 5, 1) + \frac{10}{5}\,(1, 0, -2, 0) + \frac{20}{105}\,(-8, 5, -4, 0) =$$
$$= (0, 0, 5, 1) + (2, 0, -4, 0) + \frac{4}{21}\,(-8, 5, -4, 0) = \left(\frac{10}{21}, \frac{20}{21}, \frac{5}{21}, 1\right),$$

quindi una base ortogonale di V è

$$\{w_1 = (1, 0, -2, 0), \quad \bar{w}_2 = (-8, 5, -4, 0), \quad \bar{w}_3 = 21w_3 = (10, 20, 5, 21)\}.$$

Si conclude che una base ortonormale di V è

$$\left\{u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1, 0, -2, 0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{105}}\,(-8, 5, -4, 0), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{966}}\,(10, 20, 5, 21)\right\}.$$

Punto 4. Il complemento ortogonale $V^\perp$ di V ha dimensione $\dim(\mathbb{R}^4) - \dim(V) = 4 - 3 = 1$ e un vettore di $V^\perp$ è

$$w = (2, 4, 1, -5)$$

cioè il vettore dei coefficienti delle incognite nell'equazione che definisce V. Quindi $\{w\}$ è una base di $V^\perp$.

Punto 2. Ricordiamo che $\mathbb{R}^4 = V \oplus V^\perp$ e quindi ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ si scrive in modo unico come somma di un vettore in V e uno di $V^\perp$:

$$v = v_0 + \bar{v}_0, \qquad \text{con } v_0 \in V,\ \bar{v}_0 \in V^\perp,$$

dove v_0 è la proiezione ortogonale di v su V e $\bar{v}_0$ è la proiezione ortogonale di v su $V^\perp$.

In questo caso è più semplice calcolare prima la proiezione ortogonale di u su $V^\perp$, infatti una base ortonormale di $V^\perp$ è

$$\left\{\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{46}}\, w = \frac{1}{\sqrt{46}}\,(2, 4, 1, -5)\right\}$$

quindi la proiezione ortogonale di $u = (0, 1, 0, 1)$ su $V^\perp$ è

$$\bar{u}_0 = (u \cdot \bar{w})\bar{w} = -\frac{1}{46}(2, 4, 1, -5) = \left(-\frac{1}{23}, -\frac{2}{23}, -\frac{1}{46}, \frac{5}{46}\right).$$

Ne segue che la proiezione ortogonale di u su V è

$$u_0 = u - \bar{u}_0 = (0,1,0,1) - \left(-\frac{1}{23}, -\frac{2}{23}, -\frac{1}{46}, \frac{5}{46}\right) = \left(\frac{1}{23}, \frac{25}{23}, \frac{1}{46}, \frac{41}{46}\right) \in V.$$

Punto 3. Consideriamo la base $\{v_1 = (1,0,-2,0),\ v_2 = (0,1,-4,0),\ v_3 = (0,0,5,1)\}$ di V trovata prima e costruiamo la matrice di Gram:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 \\ 8 & 17 & -20 \\ -10 & -20 & 26 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è

$$\det(M) = 46.$$

Allora il volume del parallelepipedo avente per lati v_1, v_2, v_3 è

$$\sqrt{\det(M)} = \sqrt{46}.$$

Soluzione dell'esercizio 2

Punto 1. La retta r è l'intersezione del piano $\alpha\colon x - z - 4 = 0$ con il piano $\beta\colon y - 2z - 3 = 0$, quindi tutti i piani che contengono r hanno equazione

$$\lambda(x - z - 4) + \mu(y - 2z - 3) = 0, \qquad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0,0),$$

che possiamo riscrivere, mettendo in evidenza le incognite, così:

$$\lambda x + \mu y + (-\lambda - 2\mu)z + (-4\lambda - 3\mu) = 0 \tag{1}$$

che perciò è l'equazione del fascio di piani contenenti la retta r.

Punto 2. La retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = t, \end{cases}$$

dove t è il parametro, e quindi un vettore direttore di r è $v = (1,2,1)$.

Sia $u = (a,b,c)$ un vettore direttore della retta cercata s. La condizione che s sia parallela al piano π è

$$2a + 4b + c = 0,$$

mentre la condizione che s sia ortogonale ad r è

$$a + 2b + c = 0.$$

Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + 4b + c = 0, \\ a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

si trova $c = 0$ e $a = -2b$. Posto $b = 1$, si conclude che $a = -2$, $b = 1$, $c = 0$, cioè $u = (-2,1,0)$ è un vettore direttore della retta s che quindi ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 3, \end{cases}$$

da cui si ricava $t = y + 1$, che sostituita nella prima equazione dà $x + 2y = 0$, cioè la retta s ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 3. \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 3

Punto 1. Si ha

$$F_k((e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)) = 3k$$

deve essere uguale a 4, quindi $k = 4/3$ è il valore richiesto di k.

Punto 2. Se $k = 0$, la matrice A è la matrice nulla. Quindi possiamo supporre $k \neq 0$.
Calcoliamo gli autovalori di A: si ha

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & k \\ 0 & k - \lambda & 0 \\ k & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

che ha determinante

$$\det(A - \lambda I) = (k - \lambda)(\lambda^2 - k^2) = -(\lambda - k)^2(\lambda + k),$$

quindi gli autovalori di A sono k con molteplicità algebrica 2 e $-k$ con molteplicità algebrica 1, che sono distinti perché $k \neq 0$. Si conclude che la forma quadratica ha segnatura $(1, 2)$ se e solo se $k < 0$.

Punto 3. Per $k = -1$, la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 1. Gli autospazi relativi sono

$$V_{-1} = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

e

$$V_1 = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1, 0, -1) \rangle,$$

quindi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la forma quadratica è ridotta a forma canonica è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \right\}.$$

La forma canonica è quella associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cioè la forma quadratica in forma canonica è $q(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$.