COMPLEMENTI ED ESERCIZI (ROSATI)

PARTE PRIMA

5.32 Esercizi. Parte prima

1) Scrivere le equazioni della retta congiungente i due punti $P(1, 0, -2)$ e $Q(2, -3, 5)$.

2) Quali sono i parametri direttori della retta che congiunge $O(0, 0, 0)$ con $A(a, b, c)$?

3) I quattro punti $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ sono complanari?

4) Scrivere l'equazione del piano passante per i tre punti $P(a, 0, 0)$, $Q(b, 0, 0)$ ed $R(e, f, g)$. Discutere il risultato.

5) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $(0, 0, 0)$ e parallelo ai due vettori di componenti rispettive (l, m, n), (l', m', n'); si suppongono i due vettori non paralleli tra loro.

6) Scrivere l'equazione del piano passante per $A(1,0,-2)$, $B(0, 5, -1)$ e parallelo all'asse x.

7) Scrivere delle equazioni parametriche per il piano $2x - y + z - 1 = 0$.

8) Scrivere delle equazioni parametriche della retta passante per i due punti $P(1, 0, -2)$ e $Q(2, -3, 5)$. Confrontare con l'esercizio 1.

9) Scrivere delle equazioni ridotte di ciascuna delle rette:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

10) Determinare i parametri direttori delle due rette di cui al n. 9.

11) Qual'è il piano passante per la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

e per il punto $(1, 0, -3)$?

12) Determinare il piano passante per la retta r di cui al n. 11 e inoltre parallelo alla retta

$$\begin{cases} 3x - y - z - 2 = 0 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$$

13) Nella stella dei piani passanti per il punto $A(1,0,1)$, scrivere l'equazione dei piani che passano per il punto $B(5,1,0)$; dei piani paralleli all'asse y. Fare le considerazioni del caso.

14) Nella stella dei piani passanti per $(1, 0, 1)$ determinare il piano contenente la retta $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; il piano parallelo al piano

$$2x - y + 5z - 17 = 0$$

15) Le due rette

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

sono parallele? Perché?

16) Determinare il piano parallelo alla retta

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

e passante per la retta

$$\begin{cases} x + 5 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

17) Esiste un piano passante per la retta

$$\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

e parallelo alla retta

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x + y = 0 \qquad ? \end{cases}$$

E perché?

18) Determinare il piano passante per $O(0, 0, 0)$ e parallelo al piano $2x - y + 5 = 0$.

19) Determinare la retta passante per $P(0, 1, 1)$, parallela al piano $2x - 5 = 0$, e complanare con la retta

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ z = 5x + 1 \end{cases}$$

20) Qual'è la condizione a cui devono soddisfare λ e μ affinché il piano

$$\lambda(x - y) + \mu(2x + y - 2z) = 0$$

passi per il punto di intersezione della retta

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

con il piano $x + 2y - 2z + 1 = 0$?

Si cerchi di arrivare al risultato in due modi diversi.

Algebra lineare — Esercizi —

1) In $\mathbb{R}^2$ dare delle equazioni cartesiane e parametriche della retta passante per $P=(1,1)$ e parallela al sottospazio $r: = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x-y=0\}$

2) Risolvere a seconda del parametro λ, reale, il sistema Σ_λ

$$\begin{cases} \lambda x - 2y + 4 = 0 \\ x + (\lambda-3)y + 6 - 2\lambda = 0 \end{cases}$$

$\forall \lambda$ sia $Sol(\Sigma_\lambda)$ l'insieme delle soluzioni; determinare il più piccolo sottospazio affine $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $Sol(\Sigma_\lambda)\subseteq A$.

3) Esistono due piani affini sghembi in $\mathbb{R}^4$?

4) In $\mathbb{R}^3$ sia r la retta di equazioni $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ ed s la retta di equazioni $\begin{cases} x-5y+6z=0 \\ 5x-y+6z+1=0 \end{cases}$

Mostrare che $r // s$.

5) In $\mathbb{R}^3$ sia π il piano di equazione $x+y+z=0$ ed r la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$

Dimostrare che esiste un'unica retta s passante per $P=(1,1,1)$ e parallela ad π e con $r\cap s \neq \emptyset$. Determinare $r\cap s$.

6) Determinare il piano del fascio determinato dei piani di equazione π_1: $X = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

e π_2: $2x+3y-4z-1=0$: a) passante per il punto $P=(1,0,0)$, b) parallelo a $x+y+z=0$

- Esercizi proposti.

II.1 - Determinare le equazioni dei seguenti piani:

i) passante per il punto $A(1, 1, 0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}(1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}(0, 2, 3)$; $(2x - 3y + 2z + 1 = 0)$

ii) passante per i punti $B(0, 1, -1)$, $C(3, 2, 1)$ e parallelo al vettore $\mathbf{w}(0, 0, 5)$; $(x - 3y + 3 = 0)$

iii) passante per il punto $D(1, 1, -1)$ e parallelo al vettore $\mathbf{n}(1, -1, 2)$; $(x - y + 2z + 2 = 0)$

iv) passante per i punti $E(0, 1, 0)$, $F(2, -1, 0)$ e $G(1, 2, 2)$. $(x + y - z - 1 = 0)$

II.2 - Scrivere l'equazione dei seguenti piani:

i) passante per il punto $A(1, 2, 3)$ e parallelo al vettore $\mathbf{n}(0, 1, -2)$; $(y - 2z + 4 = 0)$

ii) passante per il punto $B(0, 1, -1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}(1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}(1, 2, -1)$; $(x + z + 1 = 0)$

iii) passante per i punti $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$ e parallelo al vettore $\mathbf{u}(0, 1, -2)$; $(3x - 2y - z + 4 = 0)$

iv) passante per i punti $A(1, 2, 3)$, $B(0, 2, 1)$ e $C(1, -1, 2)$. $(6x + y - 3z + 1 = 0)$

II.3 - Rappresentare, mediante equazioni parametriche e come intersezione di piani, la retta r passante per il punto $A(1, 1, 0)$ e parallela al vettore $\mathbf{u}(1, -1, 2)$. $(x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t)$

II.4 - Rappresentare, in forma parametrica e come intersezione di piani, le seguenti rette:

i) passante per i punti $A(1, 2, -1)$ e $B(0, 1, 4)$; $(x = 1 + t, y = 2 + t, z = -1 - 5t)$

ii) passante per A e parallela alla retta $x - 1 = 2y + 3 = 1 - z$; $(x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = -1 - 2t)$

iii) passante per A e parallela all'asse z; $(x = 1, y = 2, z = -1 + t)$

iv) passante per A e parallela ai piani cordinati xy e yz; $(x = 1, y = 2 + t, z = -1)$

v) passante per A e parallela ai piani $x + y - 1 = 0$ e $2y + 3 = 0$. $(x = 1, y = 2, z = -1 + t)$

II.5 - Determinare i valori dei parametri reali h e k tali che i piani $2x + hy - 2z + 3 = 0$ e $x + 2y + kz + 1 = 0$:

i) siano paralleli; $(h = 4, k = -1)$

ii) si intersechino in una retta parallela al vettore $\mathbf{u}(1, 1, 1)$. $(h = 0, k = -3)$

II.6 - Studiare la mutua posizione piano - retta nei seguenti casi:

i) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x = 1 + 2t, y = -2 + t, z = 2 - t$; (incidenti)

ii) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x = 1 + t, y = 1 + 3t, z = -1$; $(r \subseteq \alpha)$

iii) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x + 2z = 0, 2x - y + z = 0$; (incidenti)

iv) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x - 1 = 0, -y + z = 0$. (paralleli)

II.7 - Determinare le equazioni di una retta passante per il punto $P(1, -1, 2)$ ed incidente la retta $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$. $(x - y - z = 0, x + z - 3 = 0)$

II.8 - Trovare le equazioni della retta per l'origine incidente le rette

r: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x = y - 1 \\ x = z + 3 \end{cases}$. $(4x - y + z = 0,\ 4x - 3y - z = 0)$