SISTEMI LINEARI

1. Esercizi

Esercizio 1. Verificare se $(2,1,1)$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+2y-z=3. \end{cases}$$

Trovare poi tutte le soluzioni del sistema.

Esercizio 2. Scrivere un sistema lineare di 3 equazioni in due incognite avente $(1,2)$ come unica soluzione. E' vero che una delle equazioni è combinazione lineare delle altre? E' vero che sono tutte proporzionali?

Esercizio 3. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$S_1: \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=2 \\ 2x-3y=1 \\ 4x-7y=3 \end{cases} ; \quad S_2: \begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ x-z=1 \\ 5x-2y-z=-1 \end{cases} ; \quad S_3: \begin{cases} x-y+2t=0 \\ 2x+y+z-t=0 \\ x-z-t=0 \end{cases} .$$

Esercizio 4. Costruire, se siste, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite in modo che sia verificata, di volta in volta, una delle seguenti proprietà :

(1) il sistema ammetta una e una sola soluzione;
(2) il sistema ammetta ∞^1 soluzioni;
(3) il sistema ammetta ∞^2 soluzioni;
(4) il sistema non ammetta soluzioni.

Esercizio 5. Utilizzando la regola di Cramer, risolvere i seguenti sistemi (h è un parametro reale):

$$S_1: \begin{cases} -2x+y+z=-1 \\ x-z=1 \\ 5x-2y-z=-1 \end{cases} ; \quad S_2: \begin{cases} hx+(2h-1)y=2 \\ x+hx=1 \end{cases} .$$

(Attenzione: discutere il secondo sistema anche per i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui non è utilizzabile la regola di Cramer.)

Esercizio 6. Discutere la risolubilità dei sistemi lineari $AX=B$ al variare del parametro $k \in \mathbb{C}$, specificando il numero di soluzioni nei vari casi. Nei casi in cui il sistema sia risolubile, calcolarne le soluzioni.

$$S_1: (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & k^2-1 \\ -3 & 2k & -2 & 2k-2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad S_2: (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} k & -k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right);$$

$$S_3: (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad S_4: (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} k & 2 & k \\ 1 & -k & 0 \\ 3 & k-1 & 1 \end{array}\right);$$

$$S_5 : (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & -k \\ k+1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad S_6 : \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Esercizio 7. Discutere al variare dei parametri reali a e b e risolvere nei casi di infinite soluzioni i seguenti sistemi lineari $AX = B$:

$$S_1 : (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ a+1 & 2 & a+2 & 3b-2 \\ 1 & a & a+2 & b+2 \end{array}\right); S_2 : (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b+2 \\ a^2 & 0 & a & b \\ 2 & a & -4 & b^2 \end{array}\right);$$

$$S_3 : (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & b(b+1) \\ 1 & 0 & a^2 & b(b-2) \\ 0 & a+1 & -3 & 0 \end{array}\right); S_4 : (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & b+1 \\ a & 0 & 2 & 0 & b+4 \\ 1 & a & 1 & a & b+1 \end{array}\right).$$

Esercizio 8. Calcolare, se possibile, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Dato il sistema lineare:

$$S : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 5x - y = -1 \end{cases}$$

stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:

(1) non ha soluzioni;
(2) ha ∞^1 soluzioni perchè $r(A) = r(A|B) = 2$;
(3) ha una sola soluzione perchè $r(A) = r(A|B) = 2$;
(4) ha $(1, -1)$ tra le sue soluzioni.

Esercizio 10. Dato il sistema lineare:

$$S : \begin{cases} x + u = 0 \\ y + 2t = 0 \\ 2x + y + z + 2t + 2u = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:

(1) ha una sola soluzione;
(2) non ha soluzioni perchè $r(A|B) = 4$;
(3) ha infinite soluzioni;
(4) ha solo 3 soluzioni.

Esercizio 11. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:

(1) A non è invertibile;

(2) A è invertibile e la sua inversa è A^t;
(3) A è invertibile e la sua inversa è $-A^t$;
(4) $AX = B$ ha ∞^1 soluzioni;
(5) $AX = B$ ha una sola soluzione.

Esercizio 12. Sapendo che $(1, 1, -1)$ è soluzione del sistema lineare:

$$S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:

(1) $r(A) = r(A|B)$;
(2) il sistema ha un'unica soluzione;
(3) il sistema ha solo 3 soluzioni.

Esercizio 13. Sia $AX = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

(1) se $n < m$ il sistema è sempre privo di soluzioni;
(2) se $n = m + 1$ il sistema ha sempre almeno una soluzione;
(3) se $n > m$ il sistema ha sempre infinite soluzioni;
(4) il sistema ha sempre almeno una soluzione se $B = 0$.

2. Soluzione di alcuni esercizi

Soluzione dell' Esercizio 1. $(2, 1, 1)$ è soluzione del sistema perché sostituendo $x = 2, y = 1$, e $z = 1$ nelle equazioni si ottengono $2 = 2$ e $3 = 3$. Il sistema ha ∞^1 soluzioni della forma $(2, 1, 1) + t(-1/3, 2/3, 1)$. Infatti, dalla prima equazione ricaviamo $x = 2 + y - z$, e sostituendo tale valore per x nella seconda equazione, ed esplicitando y, otteniamo $y = \frac{1+2z}{3}$, da cui $x = \frac{7-z}{3}$. Posto infine $z = t + 1$, si ottengono le soluzioni proposte.

Soluzione dell' Esercizio 2. Qualunque sia il sistema è vero che una delle equazioni è combinazione lineare delle altre due, ma non sono tutte proporzionali (altrimenti il rango sarebbe 1 e il sistema ammetterebbe infinite soluzioni).

Soluzione dell' Esercizio 3 Basta procedere per sostituzione, oppure usare l' algoritmo di eliminazione di Gauss.

Risolviamo il primo sistema con il metodo di sostituzione.

Dalla prima equazione ricaviamo $x : x = 1 + 2y$. Sostituendo nelle altre, otteniamo rispettivamente $2 = 2, y = -1, y = -1$, per cui il sistema diventa, dopo aver eliminato le identità e le ripetizioni

$$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ y = -1. \end{cases}$$

Sostituendo ora il valore di y otteniamo l' unica soluzione del sistema $x = -1, = -1$, ovvero $(-1, -1)$.

Risolviamo il sistema S_2 con l' algoritmo di Gauss. Riducendo la matrice completa associata otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad r_3 \to r_3 - r_1 \quad \left(\begin{array}{ccc||c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$r_3 \to r_3 - 2r_2 \left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

da cui risulta evidente che $\rho(A) = 2$ mentre $\rho(A|B) = 3$ e quindi il sistema lineare S_2 non ha nessuna soluzione. S_3 ha infinite soluzioni della forma $(0, 2t, -t, t)$ che possono essere calcolate analogamente ai due sistemi precedenti.

Soluzione dell' Esercizio 4. (1) Un siffatto sistema non esiste perché, dette A ed $A|B$ la matrice dei coefficienti e quella completa del sistema, rispettivamente, dovrebbe capitare che $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, ma la matrice A è di tipo 2×3 e quindi il suo rango è ≤ 2. (2), (3), (4) In questi casi si possono considerare rispettivamente, i sistemi $AX = B$ dove : $[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$; $[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$; $[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$. In ogni caso, per costruire tali sistemi basta scegliere la marice $A|B$ ridotta per righe e di rango opportuno.

Soluzione dell' Esercizio 5. Consideriamo il sistema S_1. La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ed è invertibile perché il suo determinante è $\det(A) = -2$. L' inversa A^{-1} può essere calcolata o con il metodo dei complementi algebrici, oppure risolvendo il sistema $AX = I$. Usando il metodo dei complementi algebrici, si ha che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene l' unica soluzione del sistema $X = A^{-1}B =^t (-1 - 1 - 2)$.

Consideriamo ora il sistema lineare S_2. La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} h & 2h-1 \\ 1 & h \end{pmatrix}$ ed il suo determinante è $\det(A) = (h-1)^2$. Quindi A è invertibile se, e solo se, $h \neq 1$. Per tali valori del parametro, la matrice inversa di A è $A^{-1} = \frac{1}{(h-1)^2} \begin{pmatrix} h & 1-2h \\ -1 & h \end{pmatrix}$. L' unica soluzione del sistema è allora $X = A^{-1}B = \frac{1}{(h-1)^2}{}^t(1, h-2)$. Se $h = 1$, il sistema diventa associato alla matrice $A|B = \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Effettuando l' operazione $r_2 \to r_2 - r_1$ si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

da cui ricaviamo che $\rho(A) = 1$, mentre $\rho(A|B) = 2$, e quindi il sistema non è compatibile per $h = 1$.

Soluzione dell' Esercizio 6. Bisogna sempre confrontare il rango della matrice dei coefficienti con il rango della matrice completa.

Di seguito si riportano l'esistenza delle soluzioni e la loro infinità . La scrittura delle soluzioni cambia dipendendo dalle scelte sulle riduzioni della matrice. Controllare le proprie risostituendo nel sistema.

N.B.: i puntini nelle formule seguenti sostituiscono la matrice che si ottiene effettuando le operazioni elementari indicate.

S_1 : per $k \neq 1, -3$ esiste una e una sola soluzione. Per $k = 1$ esistono ∞^1 soluzioni. Per $k = -3$ il sistema non ammette soluzioni. Per ottenere una matrice ridotta a partire da

$A|B$, si possono effettuare le seguenti operazioni elementari:

$$\begin{array}{l} r_2 \to r_2 + 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{array} \ldots r_3 \leftrightarrow r_2 \ldots r_3 \to r_3 - kr_2.$$

Osservare che lo scambio tra la seconda e la terza riga permette di ottenere una matrice ridotta senza imporre condizioni sul parametro.

S_2 : è un sistema lineare omogeneo e pertanto ammette sempre soluzioni. Per ottenere una matrice ridotta a partire da A (inutile considerare $A|B$ perché la colonna dei termini noti è nulla e quindi la colonna dei termini noti resterà nulla qualunque siano le operazioni elementari che effettuiamo) basta effettuare le seguenti operazioni elementari:

$$r_3 \to r_3 - r_1 \ldots r_3 \to r_3 + kr_2$$

e si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & 2k & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A è quindi uguale a 3 per ogni valore del parametro $k \in \mathbb{R}$, ossia il sistema S_2 ammette sempre ∞^1 soluzioni.

S_3 : per $k \neq 1/2$ il sistema non è compatibile, cioè non ammette soluzioni. Per $k = 1/2$ ci sono ∞^1 soluzioni. Le operazioni elementari da effettuare per ottenere una matrice ridotta a partire da $A|B$ sono

$$\begin{array}{l} r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{array} \ldots r_2 \leftrightarrow r_3.$$

Dalla matrice ridotta, si ricava che

$$\rho(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 2 & \text{se } k \neq 1 \end{cases} \qquad \rho(A|B) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq \frac{1}{2}, 1 \\ 2 & \text{se } k = \frac{1}{2}, \text{ oppure } k = 1, \end{cases}$$

da cui segue il risultato.

S_4 : Osserviamo che il rango di A non può essere più grande di 2. Iniziamo a calcolare il rango della matrice completa facendone il determinante: $\det(A|B) = 3k^2 - k - 2$, e quindi si ha che per $k \neq 1, -2/3$ si ha che $\rho(A|B) = 3$. In questo caso non ci sono soluzioni perché $r(A) \leq 2 < 3$. Restano da analizzare i casi particolari $k = 1$ e $k = -2/3$. In entrambi i casi $r(A) = 2$ e il sistema ammette una e una sola soluzione.

S_5 : per $k \neq 0, -2$ c'è una e una sola soluzione. Per $k = 0$ il sistema non ammette soluzioni e per $k = -2$ ci sono ∞^1 soluzioni. Le operazioni elementari per calcolare una matrice ridotta a partire da quella completa sono:

$$r_2 \to r_2 - r_1 \ldots r_2 \leftrightarrow r_3 \ldots r_3 \to r_3 + (1+k)r_2.$$

S_6 : esiste una e una sola soluzione perchè $r(A) = 3$. Si può calcolare così : $X = A^{-1}B$, e si ottiene $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione dell' Esercizio 7. Osserviamo che le matrici dei coefficienti dei primi tre sistemi sono quadrate. In questi casi possiamo calcolare il determinante di A. Per i valori del parametro a per i quali il determinante risulta diverso da 0 si ha che A ha rango massimo e quindi $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, ossia il sistema ammette una e una sola soluzione. Resteranno poi da discutere i casi di rango non massimo per valori particolari di a (e quindi la discussione si farà in funzione dell'unico parametro rimasto b.)

S_1 : per $a \neq 1, -2$ esiste una e una sola soluzione qualunque sia $b \in \mathbb{R}$. Per $a = 1, b \neq 3$ non esistono soluzioni. Per $a = 1, b = 3$, esistono ∞^1 soluzioni date da $\{(x, 2-x, 1), x \in \mathbb{R}\}$. Per $a = -2, b \neq 0$ il sistema non ammette soluzioni mentre per $a = -2$ e $b = 0$ ci sono ∞^2 soluzioni date da $\{(2y+2, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.

S_2 : per $a \neq 0, -1, -2$ e $\forall b \in \mathbb{R}$ c'e' una e una sola soluzione. Per $a = 0, b = 0$ ci sono ∞^1 soluzioni del tipo $\{(2z, -3z+2, z), z \in \mathbb{R}\}$, mentre per $a = 0, b \neq 0$ non ci sono soluzioni. Per $a = -2$ e per $a = -1$ non ci sono soluzioni qualunque sia il valore di b.

S_3 : per $a \neq 0, 2, -2$ c'è una e una sola soluzione. Per $a = 0$ se $b \neq 0$ non ci sono soluzioni mentre se $b = 0$ ci sono ∞^1 soluzioni del tipo $\{(0, 3z, z), z \in \mathbb{R}\}$. Per $a = 2$, se $b \neq 0$ non ci sono soluzioni mentre se $b = 0$ ci sono ∞^1 soluzioni del tipo $\{(-4z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$. Infine per $a = -2$ se $b \neq 0$ non esistono soluzioni mentre per $b = 0$ ci sono ∞^1 soluzioni date da $\{(-4z, -3z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

La matrice dei coefficienti di S_4 è una 3x4 e va quindi ridotta la matrice completa $[A|B]$.

S_4 : per $a \neq 0$ ci sono ∞^1 soluzioni, per ogni $b \in \mathbb{R}$. Per $a = 0$, se $b = -4$ ci sono ∞^2 soluzioni mentre se $b \neq -4$ non ci sono soluzioni.

Soluzione dell' Esercizio 8. La matrice C non è invertibile. Mentre si ha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A^{-1} può essere calcolata facilmente con il metodo dei complementi algebrici:

$$A_{11} = 3, A_{12} = -1, A_{21} = -2, A_{22} = 1,$$

e quindi la matrice aggiunta è

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det(A) = 1$ risulta $A^{-1} = \mathrm{adj}(A)$.

Calcoliamo B^{-1} risolvendo il sistema $BX = I$.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Effettuando la seguente sequenza di operazioni elementari

$$\begin{array}{l} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{array} \quad \ldots \quad r_3 \to r_3 + 2r_2$$

otteniamo la matrice ridotta

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Dalla terza riga si ricava che la terza riga della matrice incognita è $X_3 = (5, -2, -1)$; dalla seconda si ricava che $X_2 - 3X_3 = (-2, 1, 0)$ e quindi $X_2 = (13, -5, -3)$; la prima riga ci permette di ricavare X_1. Infatti, $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = (1, 0, 0)$, e sostituendo si ottiene $X_1 = (-40, 16, 9)$.

Soluzione dell' Esercizio 9. Solo la terza è vera. Per rispondere alle domande, il modo più veloce è ridurre il sistema. Le operazioni elementari che portano in forma ridotta la matrice completa sono

$$\begin{matrix} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 + r_1 \end{matrix} \quad \ldots \quad r_3 \to r_3 + \tfrac{7}{3} r_2$$

e la matrice ridotta è

$$\left(\begin{array}{cc||c} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Quindi, (1) è falsa perché $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, (2) è falsa perché il sistema ha due incognite e quindi il Teorema di Rouché-Capelli permette di affermare che il sistema precedente ha una sola soluzione, (3) è vera per i motivi precedenti, mentre (4) è falsa perché l' unica soluzione è $(0, 1)$.

Soluzione dell' Esercizio 10. E' vera solo la terza. Risolvendo il sistema per sostituzione, si ricava infatti

$$\begin{cases} x = -u \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

e quindi il sistema ha infinite soluzioni.

Soluzione dell' Esercizio 11. Sono vere la seconda e la quinta affermazione. Infatti, $\det(A) = 1$ e quindi A è invertibile. Di conseguenza, la quarta è falsa e la quinta è vera, per il Teorema di Cramer. Per verifica diretta, si prova che $A^{-1} = A^t$, da cui si ha che la seconda è vera, mentre la terza è falsa.

Soluzione dell' Esercizio 12. È vera solo la prima per il Teorema di Rouché-Capelli. La seconda, pur essendo vera, non può essere dedotta dall' ipotesi, ma solo da ulteriori calcoli. La terza è falsa perché nessun sistema lineare ha solo tre soluzioni.

Soluzione dell' Esercizio 13. E' vera solo l'ultima affermazione. La prima è falsa perché l' esistenza di soluzioni dipende dal rango e non da n ed m. La seconda è falsa per lo stesso motivo. La terza è falsa perché non si sa se il sistema è compatibile. Se lo fosse, avrebbe infinite soluzioni. L' ultima è vera perché ogni sistema omogeneo ha almeno la soluzione nulla.