Risolvere gli esercizi come richiesto; discutere l'esistenza di soluzioni, eventualmente al variare del parametro presente nel sistema; determinare tali soluzioni ove esistano; descrivere da un punto di vista geometrico e se possibile disegnarlo, lo spazio delle soluzioni del sistema non omogeneo e del sistema omogeneo ad esso associato

3.8. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema lineare $\Sigma_t : \begin{cases} -tx + (t-1)y + z = -1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5\,. \end{cases}$ Sia S_t l'insieme delle soluzioni di Σ_t.

(a) Per quali valori di t S_t è costituito da un solo punto?
(b) Per quali valori di t S_t è vuoto?
(c) Per quali valori di t S_t è una sottovarietà lineare affine di dimensione 1?
(d) Per i valori di t di cui al punto (c), esibire equazioni parametriche di S_t.

3.9. Sia dato il sistema lineare reale Σ_k: $A_k x = b_k$ di matrice completa $C_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & k^2-1 & 0 \\ k & -1 & -k & -1 \\ 1 & -k & 1 & k \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di k Σ_k ammette un'unica soluzione e, in questi casi, determinare la soluzione di Σ_k. Risolvere lo stesso problema su $\mathbb{C}$.

3.10. Consideriamo il sistema lineare reale $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = \lambda \\ (2-\lambda)x + y + z = 1 \end{cases}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Discutere i ranghi delle matrici completa e incompleta al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Determinare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_λ.
(c) Descrivere l'insieme S unione di tutti gli S_λ.
(d) È vero che S è una sottovarietà affine lineare? Eventualmente qual'è la minima sottovarietà affine lineare contenente S?

3.11. Come l'esercizio precedente, usando il sistema $\begin{cases} x + (1-\lambda)y + z = 1 + \lambda \\ (2-\lambda)x + (\lambda-1)^2 y + \lambda z = 3 - \lambda^2 \\ x + (\lambda-1)z = 2 + \lambda \end{cases}$

3.12. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Si discuta il sistema $AX = b$ al variare di b in $\mathbb{R}^4$; in particolare si mostri che i b per i quali il sistema ammette soluzione, sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione lineare omogenea.

3.13. Si consideri il seguente sistema lineare $\begin{cases} lx & + & my & - & mz & = & m \\ mx & - & ly & & & = & l \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{cases}$.

Si dica per quali coppie $(l, m) \in \mathbb{R}^2$ il sistema ammette soluzioni, e per quali la soluzione è unica.

Discutere l'esistenza di soluzioni per i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro reale k. Determinare, ove esistano, le soluzioni.e descrivere da un punto di vista geometrico lo spazio delle soluzioni del sistema non omogeneo e del sistema omogeneo associato.

$$\begin{cases} kx - 2y = k + 1 \\ x + (k+3)y = 0 \\ (k-1)x - (k+5)y = k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + 2y + (k+1)z = 0 \\ x + (k+3)y = 0 \\ (k-1)x - (k+5)y - (k+1)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2k+1)x + (k+1)y + 3kz = k \\ (2k-1)x + (k-2)y + (2k-1)z = k + 1 \\ 3kx + 2ky + (4k-1)z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ky + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + ky + z = 1 \\ 3x + 2ky + 3z = 2 \end{cases}$$

Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

abbia, rispettivamente, una unica soluzione, nessuna soluzione o più di una soluzione.