Esercizi

1) Sia $\mathcal{O} = \{1,2,3,4,5\}$: si studi la struttura $(\mathcal{O}, *)$ con $* : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ individuata dalla tabella:

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	5	1	4	3
4	4	3	4	1	2
5	5	4	3	2	1

2) Sia $\mathcal{E}$ un insieme e consideriamo l'insieme X di tutte le applicazioni $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ suriettive.
Definiamo in X l'operazione di composizione:
$\forall f, g \in X \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$
Studiare la struttura $(X, \circ)$

3) Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti reali, di grado qualunque; sia $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$ il polinomio "SOMMA" che si ottiene sommando i coefficienti dei termini di ugual grado: $(\mathbb{R}[x], +)$ è un gruppo abeliano?
Se "$\cdot$" è il prodotto tra polinomi, $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ è un anello unitario.

4) Dimostrare che l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } (a,b) \neq (0,0) \right\}$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione tra matrici (Gruppo di Klein)

5) L'insieme $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ è invertibile} \}$ con l'operazione di moltiplicazione tra matrici è un gruppo, detto GRUPPO GENERALIZZATO LINEARE

6) $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ non è un gruppo, $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è anello.

7) Definiamo <u>ORTOGONALE</u> una matrice A tale che A è invertibile e $A^{-1} = A^T$. L'insieme delle matrici ortogonali $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.