Sia $A \cdot X = 0$ il sistema lineare omogeneo di matrice A sottoriportata.

1) Ridurre la matrice A alla forma a gradini canonica A' mediante eliminazione di Gauss

2) Discuterne il rango e di conseguenza la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema mediante la riduzione a gradini con le operazioni elementari riga e poi rifare la discussione con il metodo dei minori.

3) Determinare un sistema di soluzioni fondamentali e la soluzione generale del sistema

4) Dare una descrizione geometrica dello spazio delle soluzioni disegnandolo ove possibile.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2k & -1 & 3 \\ 2 & -k & 3k \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix} k \in \mathbb{R}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} k \in \mathbb{R};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} k \in \mathbb{R}; \quad A = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 2 & -t & 4 \\ -1 & 0 & -t \end{pmatrix} t \in \mathbb{R}.$$

1) Durante una migrazione una popolazione di uccelli viaggia in media per circa 40 km al giorno. Partendo da una regione equatoriale, nei primi due giorni la popolazione si muove verso nord-est, nei successivi tre verso nord-ovest. Rappresentare vettorialmente le velocità nei due periodi e determinare la posizione finale dello stormo.

2) Siano $F_1 = (0,0,6)$, $F_2 = (1,-3,0)$, $F_3 = (1,1,1)$ tre forze che agiscono su una massa. Quale reazione deve esercitare un vincolo per tenere la massa ferma?

3) Un razzo viene lanciato dal punto $(2,-4,-1)$ con velocità v, costante, $v = (-2,3,1)$. Raggiunge il punto $(-2,2,2)$?

4) Per misurare gli effetti di intense radiazioni elettromagnetiche ad alte frequenze (raggi X) sugli organismi, vengono contate le mutazioni in una porzione di DNA. Per effettuare le analisi, questa viene divisa in 50 segmenti di 200 basi ciascuno. Il risultato di queste misure si schematizza nei vettori $m = (11, 0, 32, 7, 15)$ (numero delle mutazioni) e $t = (13, 2, 2, 27, 6)$ (numero dei tratti) nel senso che: 13 segmenti contengono 11 mutazioni ciascuno, 2 ne contengono nessuna, 2 ne contengono 32, e così via. Trovare il numero totale di mutazioni, riconoscendo il carattere vettoriale dell'operazione necessaria. Determinare inoltre il numero medio di mutazioni per segmento e il numero medio di mutazioni per base.

5) Siano $v = (1,6)$, $w = (0,-3)$ due vettori del piano.
Sono perpendicolari?
Determinare il vettore u della forma $(2, 2k)$ perpendicolare a v.
Determinare, infine, la proiezione di w sulle direzioni di u e v.

6) Determinare le coordinate polari dei vettori $A = (-1,2)$; $B = (2,-1)$; $C = (0,4)$

7) Siano $v = (1,-2,3)$; $w = (-2;4,-6)$; $u = (0,3,1)$. Calcolare $v \times w$, $v \times u$, $w \times u$ e i rispettivi moduli. Che particolarità hanno v e w, messa in luce dal loro prodotto vettoriale?