# Esercizi - Algebra lineare

1) Siano $A = (1,1,1,0)^T$, $B = (0,1,1,1)^T$; $C = (1,1,0,0)^T$ tre vettori di $\mathbb{R}^4$

a) A, B, C sono linearmente dipendenti o indipendenti?

b) Dare un vettore non nullo D tale che A, B, C, D siano linearmente dipendenti

c) Dare un vettore E tale che A, B, C, E siano l. indipendenti

2) Dati i vettori $v_1 = (1,-1,0)^T$, $v_2 = (2,1,1)^T$, $v_3 = (0,0,-1)^T$, $v_4 = (-2,2,-1)^T$ dire se sono linearmente dipendenti. È possibile scegliere tre vettori formanti una base di $\mathbb{R}^3$? Giustificare le risposte e dare le componenti del quarto vettore rispetto a tale base.

3) Dati i vettori $v_1 = (9,-7,0)^T$ $v_2 = (1,3,0)^T$, $v_3 = (5,-2,0)^T$ esprimere $v_1$ come combinazione lineare di $v_2$ e $v_3$. Si può dare $v_3$ mediante $v_1$ e $v_2$?

4) Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $V = \langle\langle (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \rangle\rangle$. Disegnarlo e determinarne l'equazione cartesiana.

5) Data una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di uno spazio vettoriale $V$ e posto $g = v_1 + v_3$, dimostrare che $\mathcal{B}_1 = \{g, v_2, v_3\}$ è ancora una base di $V$. Darne un esempio concreto.

6) Dare un esempio geometrico del fatto che $d+1$ vettori in uno spazio di dimensione $d$ sono l. dipendenti

7) Descrivere tramite equazioni il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (1,0,2,0)^T$, $v_2 = (1,0,-1,0)^T$, $v_3 = (0,-1,1,1)^T$ e poi completare l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

**Determinare il numero massimo di vettori linearmente indipendenti fra quelli assegnati**

1. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ Sol:2

2. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\6\end{pmatrix}$ SOL:3

3. $\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\\-2\end{pmatrix}$ SOL:3

**Determinare, al variare del parametro relae k, il numero massimo di vettori linearmente indipendenti fra quelli assegnati**

1. $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\2k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\0\\1\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2k\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ SOL: $k \neq 0,-1:4;\ k = 0,-1:3.$

2. $\begin{pmatrix}2\\0\\k-1\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\k-1\\0\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\k-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2k-2\\1\\0\end{pmatrix}$ SOL: $k \neq 0,1:4;\ k = 0,1:3.$

3. $\begin{pmatrix}1\\1\\k\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\k\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\k\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2k\\1\\0\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}0\\k\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\k\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\k\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\k\end{pmatrix}$