$$Q(x,y,z) = \underbrace{4xy + yz}_{\text{PARTE QUADRAT.}} \underbrace{-4x-2z}_{\text{PARTE LINEARE}} = 0 \Rightarrow (x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + B^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

(forma matriciale)

1) determiniamo la matrice della forma quadratica che determina la parte di grado due, ~~che definisce~~ ~~la parte~~ supponendo in $\mathbb{R}^3$ la base canonica.

$$A = [q]_c = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ la parte quadratica

sarà data dal prodotto matriciale $(x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

LA PARTE LINEARE SI OTTIENE MATRICIALM.

considerando il vettore B dei coef. moltiplicato

per $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è la parte lineare

RIDUCIAMO ORTOGONALMENTE LA PARTE QUADRATICA A SOMMA DI QUADRATI.

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{17}}{2} \qquad \lambda_3 = -\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{17}}{2} y_1^2 - \frac{\sqrt{17}}{2} z_1^2$ NUOVA PARTE QUADRATICA DOPO CAMBIAM. DI COORDINATE

CERCHIAMO AUTOSPAZI E UNA LORO BASE

$$E_0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + \frac{1}{2} z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -4x \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad E_0 \ll (1, 0, -4) \gg \quad \Rightarrow \quad v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, 0, \frac{-4}{\sqrt{17}} \right)$ primo vettore di $B_{\perp m}$

(2) ANALOGAMENTE $V_2 = \left(\frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{17}}\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$$V_3 = \left(\frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{2}} , \frac{-1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{2}} \right)$$

$\Rightarrow$ il cambiamento di coordinate sarà

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{17}} x_1 + \frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{2}} y_1 + \frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{2}} z_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 \\ z = \frac{-4}{\sqrt{17}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{2}} z_1 \end{cases}$$

$*$

NUOVA EQUAZIONE

$$Q(x_1, y_1, z_1) = \frac{\sqrt{17}}{2} y_1^2 - \frac{\sqrt{17}}{2} z_1^2 +$$

$$+ \frac{-4}{\sqrt{17}} x_1 - \frac{24}{\sqrt{17}\sqrt{2}} y_1 - \frac{24}{\sqrt{17}\sqrt{2}} z_1 + \frac{8}{\sqrt{17}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{17}\sqrt{2}} y_1 \; \frac{-2}{\sqrt{17}\sqrt{2}} z_1 =$$

$$\frac{\sqrt{17}}{2} y_1^2 - \frac{\sqrt{17}}{2} z_1^2 + \frac{4}{\sqrt{17}} x_1 - \frac{\overset{13\sqrt{2}}{\cancel{26}}}{\sqrt{17}\sqrt{2}} y_1 \; \frac{-\overset{13\sqrt{2}}{\cancel{26}}}{\sqrt{17}\sqrt{2}} z_1$$

ELIMIANO QUANTO POSSIBILE DALLA PARTE LINEARE

RISCRIVIAMO, RIDUCENDOLO AI QUADRATI:

$$\frac{\sqrt{17}}{2}\left(y_1^2 - \frac{26\sqrt{2}}{17} y_1 \right) = \frac{\sqrt{17}}{2}\left(y_1 - \frac{13\sqrt{2}}{17} \right)^2 - \frac{13^2}{17\sqrt{17}} \qquad -\frac{\sqrt{17}}{2}\left(z_1^2 + \frac{26\sqrt{2}}{17} z_1 \right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{17}}{2}\left(z_1 + \frac{13\sqrt{2}}{17} \right)^2 + \frac{13^2}{17\sqrt{17}}$$

NUOVO CAMB. DI COORDINATE (TRASLAZIONE)

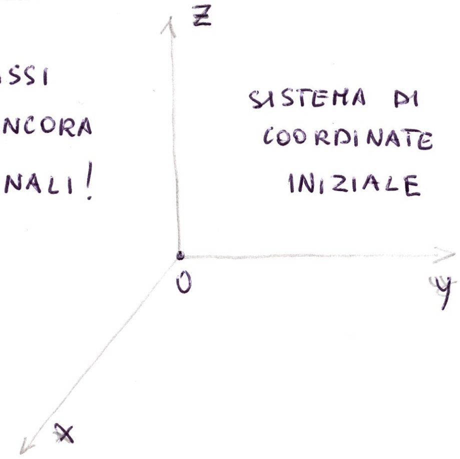
$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 - \frac{13\sqrt{2}}{17} \\ z_2 = z_1 + \frac{13\sqrt{2}}{17} \end{cases}$$

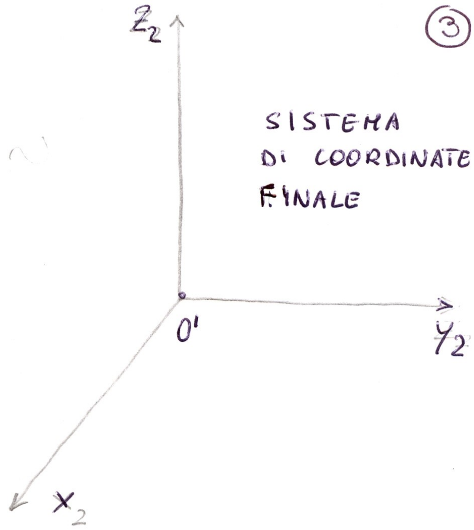
RICAVIAMO DA QUESTO SISTEMA x_1, y_1, z_1 IN FUNZIONE DI x_2, y_2, z_2 E SOSTITUIAMOLO IN $*$
TROVIAMO COSì IL CAMBIAMENTO TOTALE DI COORDINATE E QUINDI I NUOVI ASSI COORDINATI.

$$\Rightarrow Q(x_2, y_2, z_2) = \frac{\sqrt{17}}{2} y_2^2 - \frac{\sqrt{17}}{2} z_2^2 + \frac{4}{\sqrt{17}} x_2 = 0$$

EQUAZIONE DELLA QUADRICA IN FORMA CANONICA

I NUOVI ASSI SONO ANCORA ORTOGONALI!

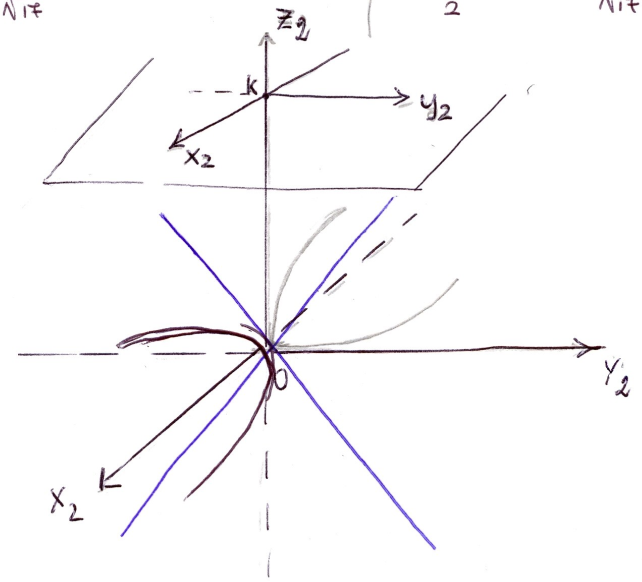




PER INDIVIDUARE DI QUALE SUPERFICIE QUADRICA SI TRATTA, CERCHIAMO LE CONICHE CHE SONO SEZIONI PIANE DELLA SUPERFICIE; INTERSECHIAMO LA SUPERFICIE COI PIANI COORDINATI:

$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{17}}{2} y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{17}} x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{2} y_2^2 = \frac{4}{\sqrt{17}} x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 0 \\ x_2 = -\frac{17}{8} y_2^2 \end{cases}$$

(PARABOLA)



$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ x_2 = \frac{17}{8} z_2^2 \end{cases}$$

(PARABOLA)

;

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \text{(diventano due rette)} \\ y_2^2 = z_2^2 \end{cases}$$

E INTERSECHIAMO LA SUPERFICIE CON PIANI // AI PIANI COORDINATI:

$$\begin{cases} \frac{8}{17} x_2 = k^2 - y_2^2 \\ z_2 = k \end{cases}$$

equazione della curva NEL PIANO $z_2 = k$, SEZIONE piana DELLA SUPERFICIE CON PIANI // A $z_2 = 0$; E COSÌ PER $x_2 = k$ e PER $y_2 = k$. (4)

$\Rightarrow$ LA SUPERFICIE QUADRICA STUDIATA È UN PARABOLOIDE IPERBOLICO.

ALTRO ESERCIZIO:

$$\boxed{\text{STUDIAMO LA QUADRICA } xy + yz + zx = 1}$$

$-\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} y_1^2 + z_1^2 = 1$ = FORMA CANONICA DELLA QUADRICA

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix};$$

(MATRICE DELLA PARTE QUADRATICA)

DIAGONALIZZIAMOLA: $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow Sp\, A = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\}$

CERCHIAMO LA NUOVA BASE:

$$E_{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = -x - y \end{cases}$$

$$\left(A - \frac{1}{2} I\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{v_1 = (1, 0, -1)}$$

altro vett. ortog.

IMPONIAMO L'ORTOGONALITÀ:

$(1, 0, -1)(x, y, -x-y) = 0$

$x + x + y = 0 \Rightarrow y$

$v_2 = (1, -2, 1)$

LI NORMALIZZIAMO: $\Rightarrow$ I PRIMI DUE VETTORI DELLA NUOVA BASE SONO:

$\|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{w_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\|v_2\| = \sqrt{6} \Rightarrow \boxed{w_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

CON ALTRO AUTOVALORE ~~autovalore~~ ~~base~~ $\lambda = 1$; E_1 diventa

$$E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

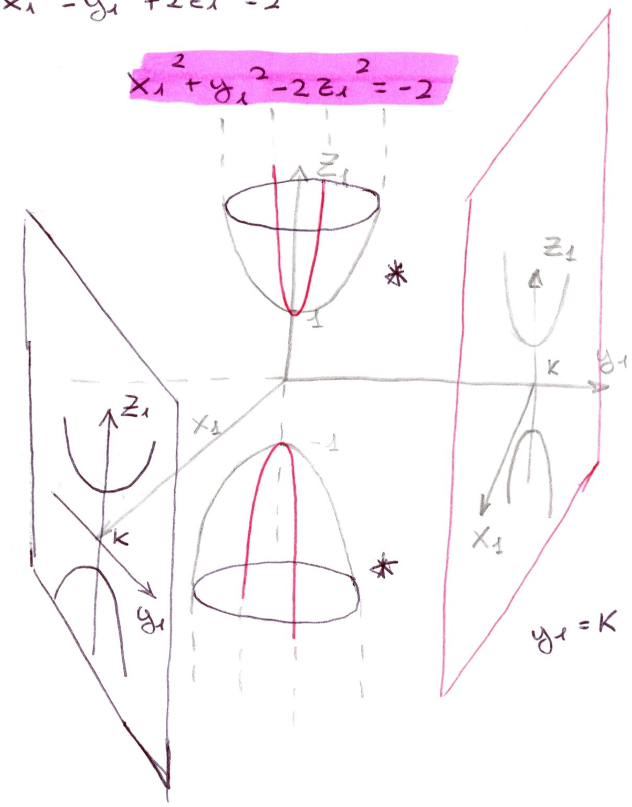
$$\sim \begin{cases} \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z = x \\ \frac{1}{2} x - y + \frac{1}{2} z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

UN VETTORE DI BASE È $\Rightarrow V_3 = (1, 1, 1) \Rightarrow \|V_3\| = \sqrt{3}$

IL TERZO VETTORE DI BASE $W_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$xy + yz + zx = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 + z_1^2 = 1$

$-x_1^2 - y_1^2 + 2z_1^2 = 2$



DISEGNAMOLA:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1^2 - 2z_1^2 = -2 \end{cases}$$

IPERBOLE

$$\begin{cases} x_1 = K \\ -y_1^2 + 2z_1^2 = 2 + K^2 \end{cases}$$

quando

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ -x_1^2 + 2z_1^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = K \quad \begin{cases} y_1 = K \\ -x_1^2 + 2z_1^2 = 2 + K \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} z_1 = K \\ x_1^2 + y_1^2 = -2 + 2k^2 \end{cases}$$

$-1 + K^2 \geq 0$

ELLISSE

$K < -1 \quad \vee \quad K > 1$

$\downarrow$ ELLISSE $\quad \downarrow$ ELLISSE

*